

В.Н.Глазков
«Физика низкоразмерных систем»
слайды к лекции 7

Квантовый эффект Холла.

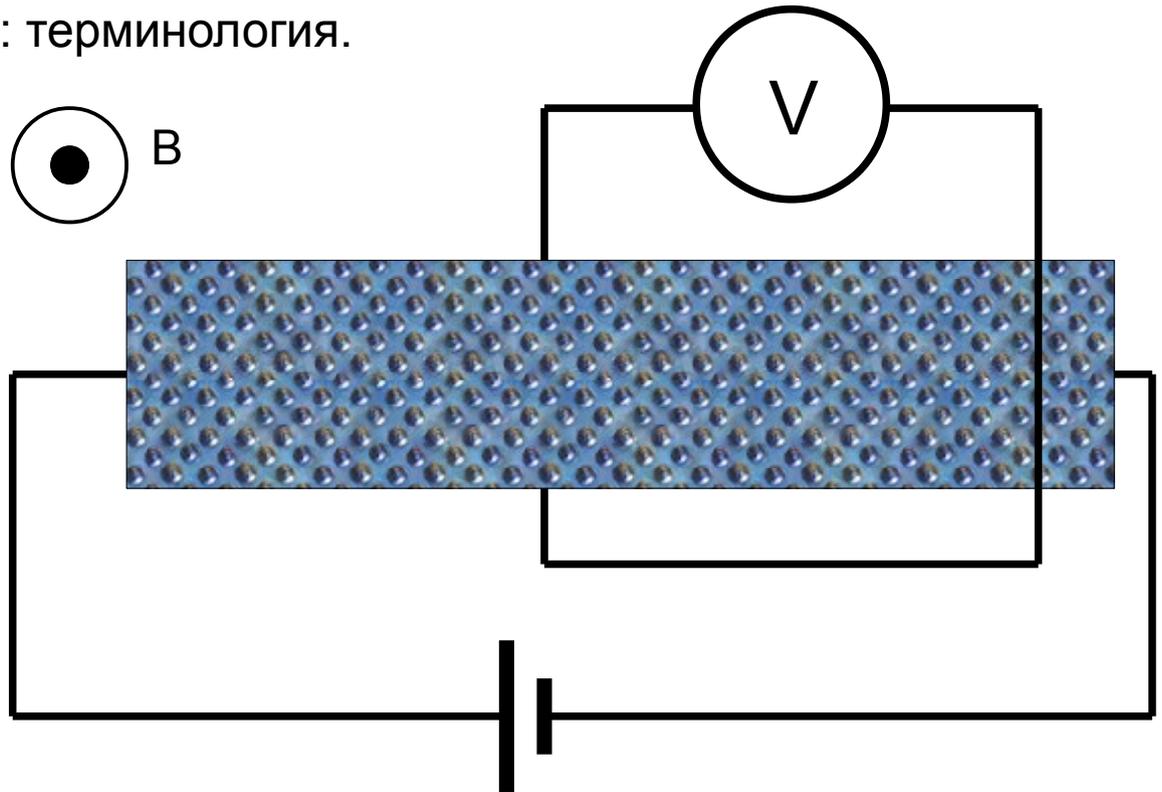
Классический эффект Холла: терминология.

без поля:

$$\vec{V}_d = -\frac{e\vec{E}\tau}{m}$$

$$\vec{j} = -ne\vec{V}_d = \sigma_0\vec{E}$$

$$\sigma_0 = ne^2\tau/m$$



В поле:

$$\vec{V}_d = -e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{V}_d \times \vec{H}]\right)\frac{\tau}{m}$$

$$\vec{j} = -ne\vec{V}_d = \sigma_0\vec{E} - \frac{e\tau}{mc}[\vec{j} \times \vec{H}] = \sigma_0\vec{E} - \frac{eH}{mc}\tau \begin{pmatrix} j_y \\ -j_x \end{pmatrix}$$

тензор проводимости

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

Классический эффект Холла: компоненты тензоров проводимости и сопротивления.

$$\omega_c = \frac{eH}{mc}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} \vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$$
$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2}$$
$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = -\frac{\sigma_0 \omega_c \tau}{1 + (\omega_c \tau)^2}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}$$
$$\sigma_{xy} = -\frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}$$

$$\vec{E} = \hat{\rho} \vec{j}$$

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{1}{\sigma_0}$$
$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{\omega_c \tau}{\sigma_0}$$

Возможно одновременное обращение в ноль диагональных компонент тензоров проводимости и сопротивления.

Квантование уровней энергии в магнитном поле.

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$$
$$\vec{A} = (0, Hx, 0)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\hat{p}_x^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{e}{c} H \hat{x} \right)^2 \right) \Psi(x, y) = W \Psi(x, y)$$

$$\Psi(x, y) = e^{ik_y y} \psi(x)$$

$$\frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \psi'' + \left(\hbar^2 k_y^2 - 2k_y \hbar \frac{e}{c} Hx + \frac{e^2}{c^2} H^2 x^2 \right) \psi \right) = W \psi$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + \frac{e^2 H^2}{2mc^2} \left(x - \frac{\hbar c k_y}{eH} \right)^2 \psi = W \psi$$

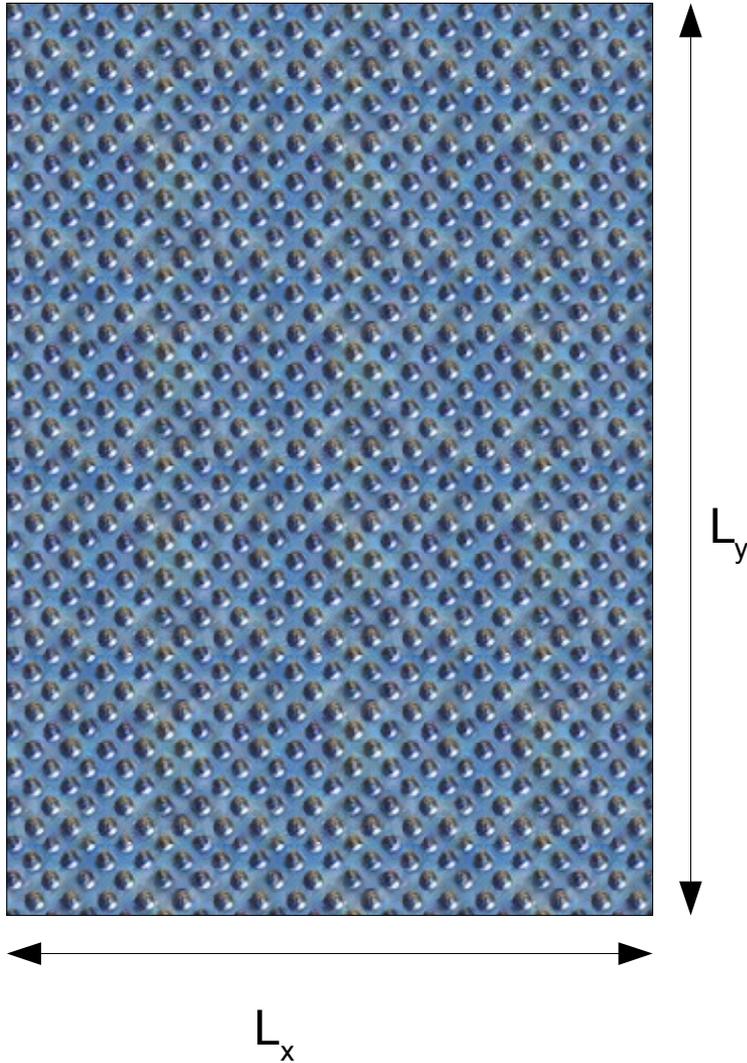
$$x_0 = \frac{\hbar c k_y}{eH} \quad -\psi'' + \frac{(x - x_0)^2}{l_H^2} \psi = w \psi$$

$$l_H = \sqrt{\frac{\hbar c}{eH}} \quad \text{в поле } 10 \text{ Тл } l_H \sim 100 \text{ \AA}$$

Уравнение гармонического осциллятора со смещённым центром

$$W_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Квантование уровней энергии в магнитном поле: ёмкость уровня Ландау.



$$k_y L_y = 2\pi r$$

$$x_0 = \frac{\hbar c k_y}{eH} \quad x_0 = l_H^2 k_y \quad l_H = \sqrt{\frac{\hbar c}{eH}}$$

$$0 < x_0 < L_x$$

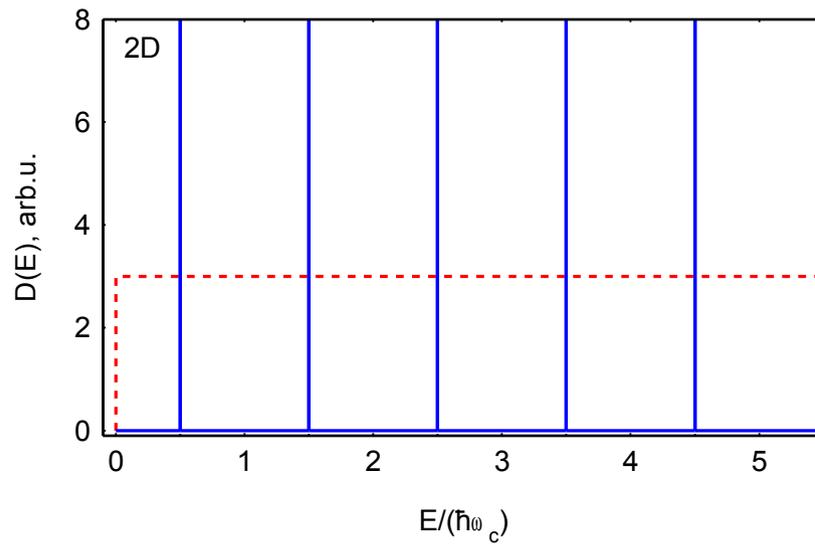
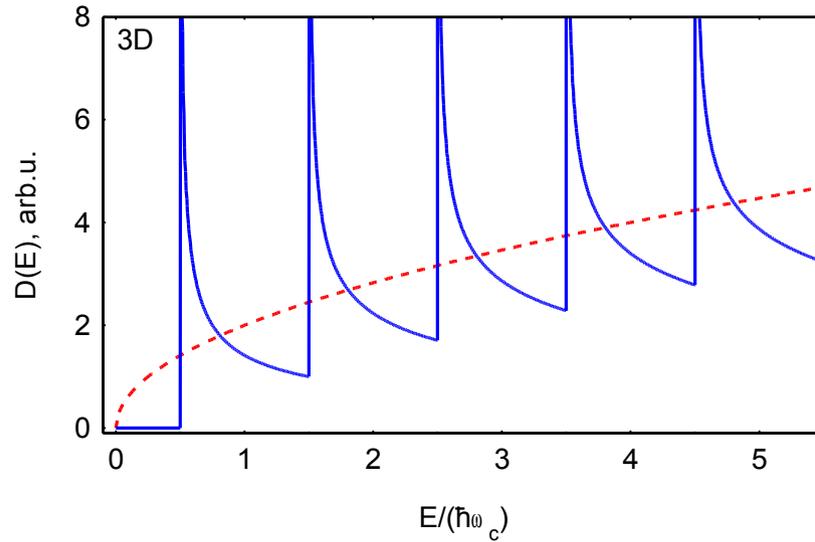
$$0 < k_y < L_x / l_H^2$$

$$r_{max} = \frac{L_x L_y}{2\pi l_H^2}$$

$$n_0 = \frac{1}{2\pi l_H^2} = \frac{eH}{2\pi \hbar c} = \frac{eH}{hc}$$

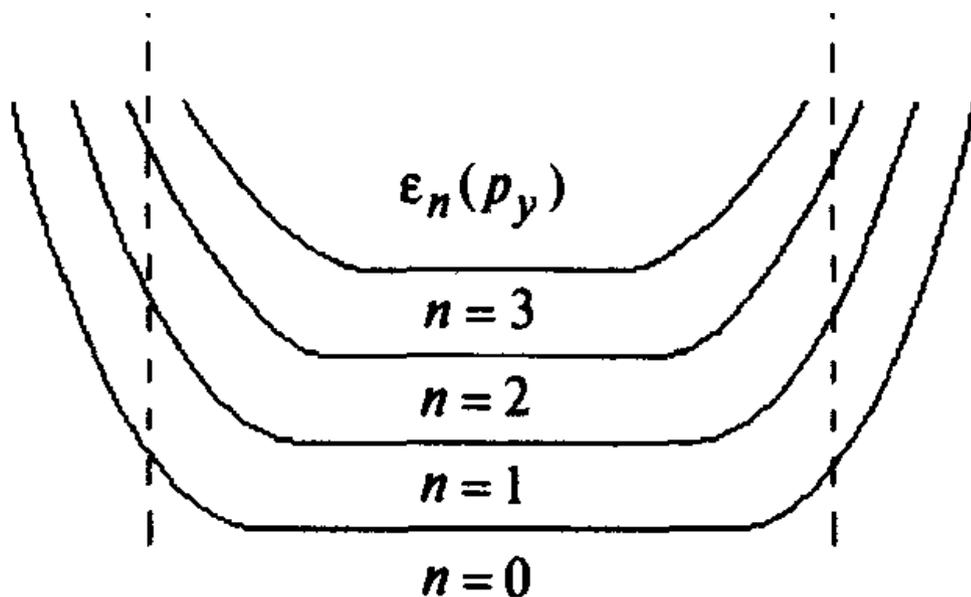
В поле 10 Тл $n_0 = 2.4 \cdot 10^{11}$ 1/см²

Уровни Ландау: плотность состояний



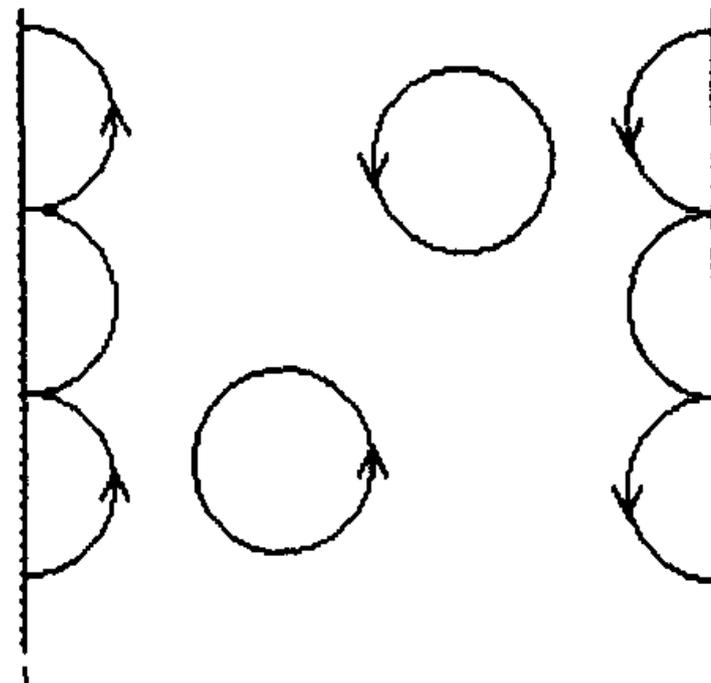
Плотность состояний как функция энергии (схематически) в трёхмерном (сверху) и двумерном (снизу) случае. Сплошная линия — с учётом квантования уровней Ландау, пунктир — в отсутствие магнитного поля. Спиновое расщепление не учитывается.

Краевые состояния в квантующем магнитном поле.



Схематическая зависимость положения уровня Ландау от координаты ведущего центра. Пунктиром показаны границы образца. Из книги В.Я.Демиховский, Г.А.Вугальтер, Физика квантовых низкоразмерных структур, 2000

Замкнутые и скачущие циклотронные орбиты. Схематический рисунок. Из книги В.Я.Демиховский, Г.А.Вугальтер, Физика квантовых низкоразмерных структур, 2000



Уровни Ландау в присутствии электрического поля.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (x - x_0)^2 \psi - eEx \psi = W \psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (x - x_0')^2 \psi = \left(W + eEl_H^2 k_y + \frac{e^2 E^2}{2m \omega_0^2} \right) \psi$$

$$x_0' = x_0 + \frac{eE}{m \omega_0^2}$$

$$W_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) - eE \left(l_H^2 k_y + \frac{eE}{2m \omega_0^2} \right) = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{eE}{2} (l_H^2 k_y + x_0')$$


снятие вырождения по k_y ,

размытие уровня Ландау в узкую зону

НО! зоны всё равно разделены друг от друга

Ток краевых состояний.

$$\vec{j}^{(i)} = n_s^{(i)} e \vec{V}^{(i)}$$

$$I_y = \int j_y dx = \sum_i \langle n_s^{(i)} \rangle e \int V_y^{(i)} dx = \sum_i \frac{c}{eH} \langle n_s^{(i)} \rangle e \int \frac{\partial E_i(x)}{\partial x} dx = \frac{e}{h} \sum_i \frac{\langle n_s^{(i)} \rangle}{n_0} \Delta E_i \Big|_{x=0}^{x=L}$$

n_0 
 $e \Delta \varphi$ 

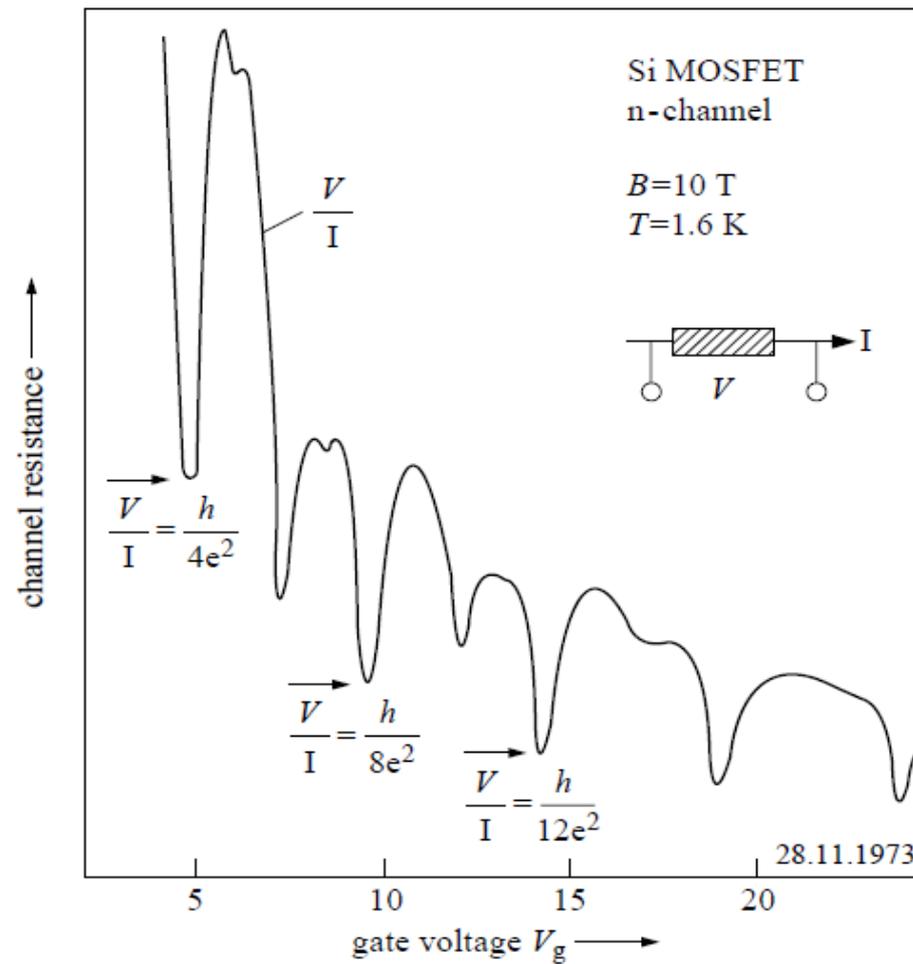
$$I_y = N \frac{e^2}{h} \Delta \varphi$$

$$R_{xy} = \frac{1}{N} \frac{h}{e^2} \approx \frac{25.8 \text{ кОм}}{N}$$

$$\sigma_{xx} = 0$$

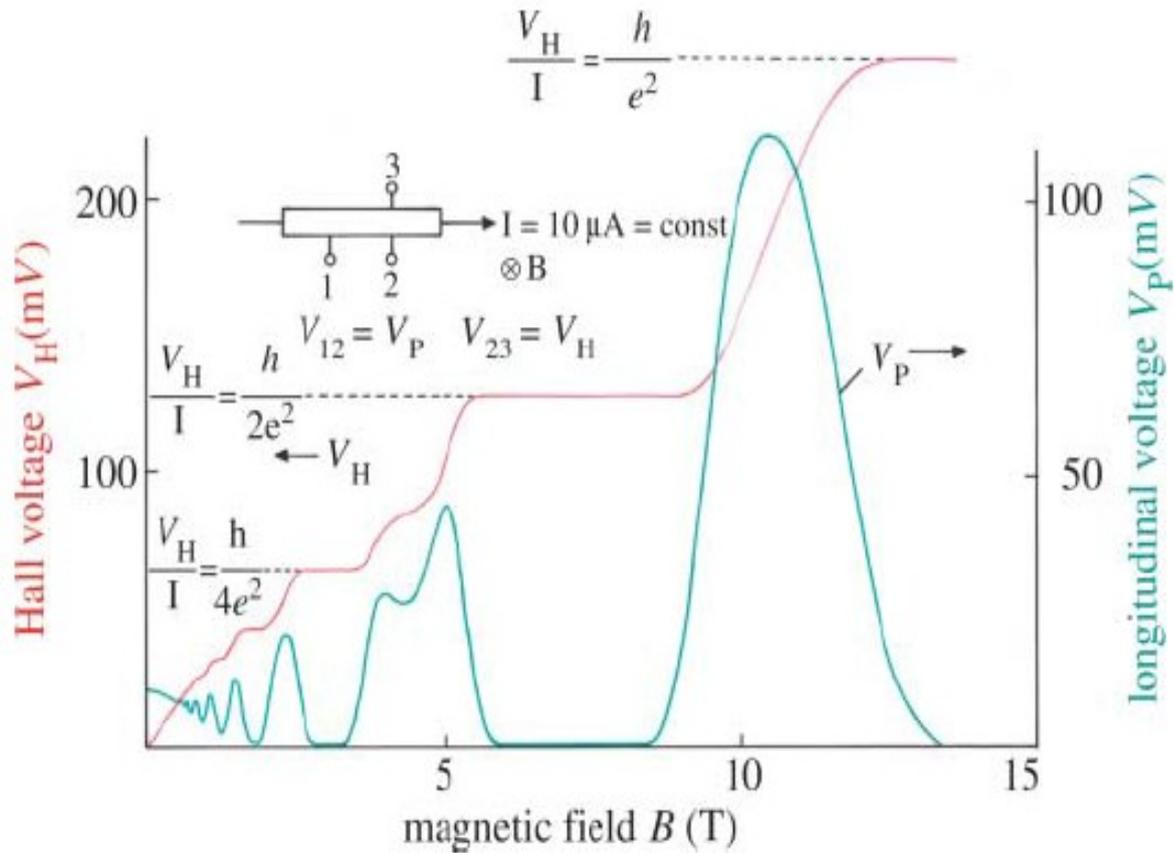
$$\sigma_{xy} = N \frac{e^2}{h}$$

Квантовый эффект Холла: эксперимент



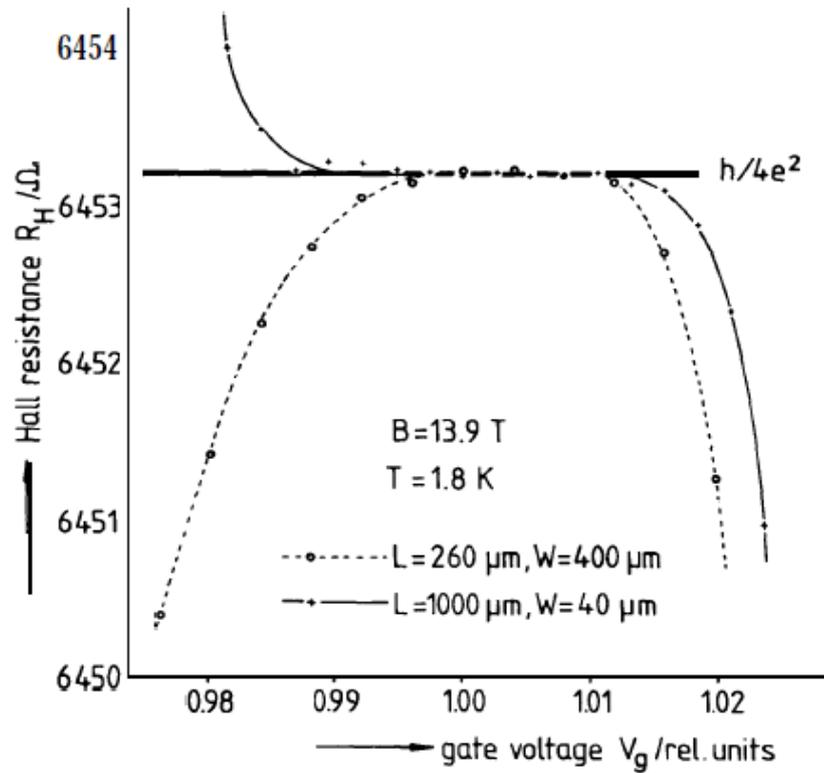
Зависимость двухконтактного сопротивления в цепи сток-исток МОП-транзистора от напряжения на затворе ($B=10\text{ T}$, $T=2\text{ K}$).
Klaus von Klitzing, Developments in the quantum Hall effect, Philosophical Transactions of the Royal Society A, 363, 2203 (2005)

Квантовый эффект Холла: эксперимент



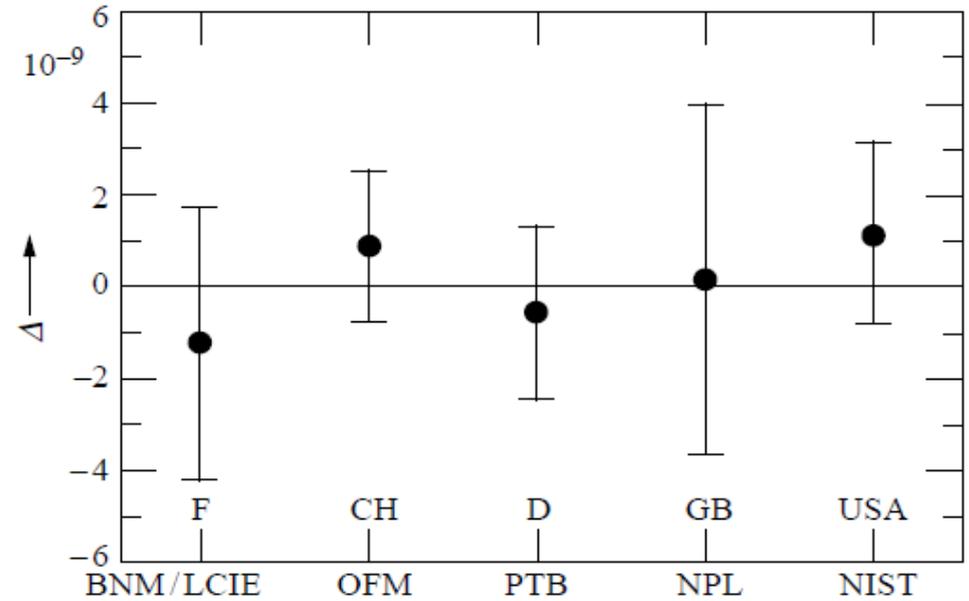
Зависимости от магнитного поля продольного и холловского напряжений на гетероструктуре GaAs-AlGaAs при токе 10 мкА.
 Klaus von Klitzing, Developments in the quantum Hall effect, Philosophical Transaction of the Royal Society A, 363, 2203 (2005)

Квантовый эффект Холла: стабильность холловского плато, метрологические применения.



Сравнение плато Холловского сопротивления для образцов разной формы (L - длина, W - ширина).

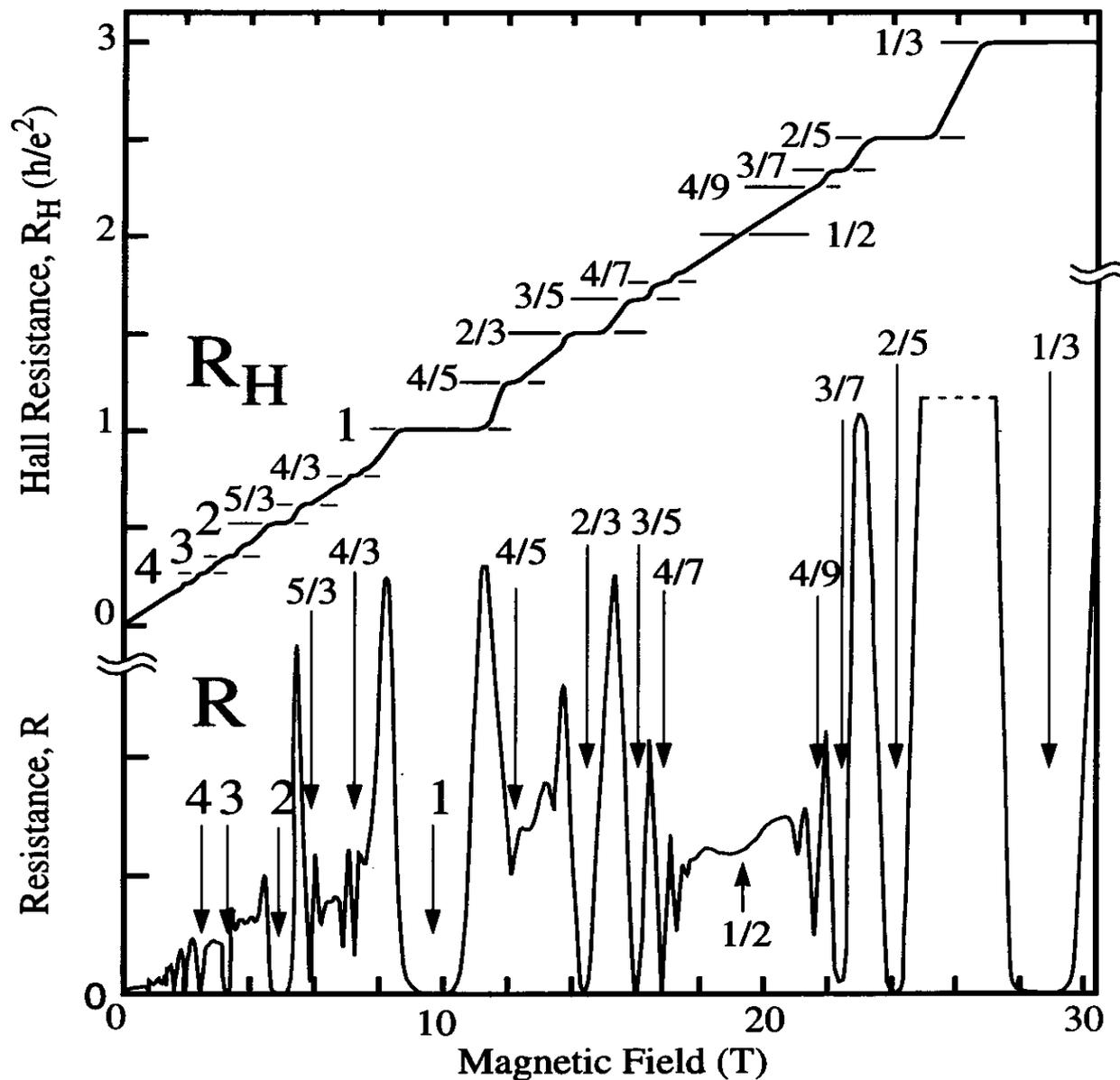
Klaus von Klitzing, The Quantized hall effect, Nobel Prize Lecture, (1985)



Воспроизводимость холловского сопротивления в различных лабораториях.
 Klaus von Klitzing, Developments in the quantum Hall effect, Philosophical Transaction of the Royal Society A, 363, 2203 (2005)

$$\frac{h}{e^2} = 25813.801 \text{ Ом}$$

Дробный квантовый эффект Холла: эксперимент.



Наблюдение дробного квантового эффекта Холла в гетероструктуре GaAs-AlGaAs с высокой подвижностью носителей
Horst L. Störmer, The fractional quantum hall effect, Nobel prize lecture, (1998)

Уровни Ландау и КЭХ в графене

«безмассовые» электроны

$$l_H = \sqrt{\frac{\hbar}{\frac{e}{c}H}}$$

$$\omega \sim \frac{V_F}{l_H} = V_F \sqrt{\frac{eH}{\hbar c}}$$

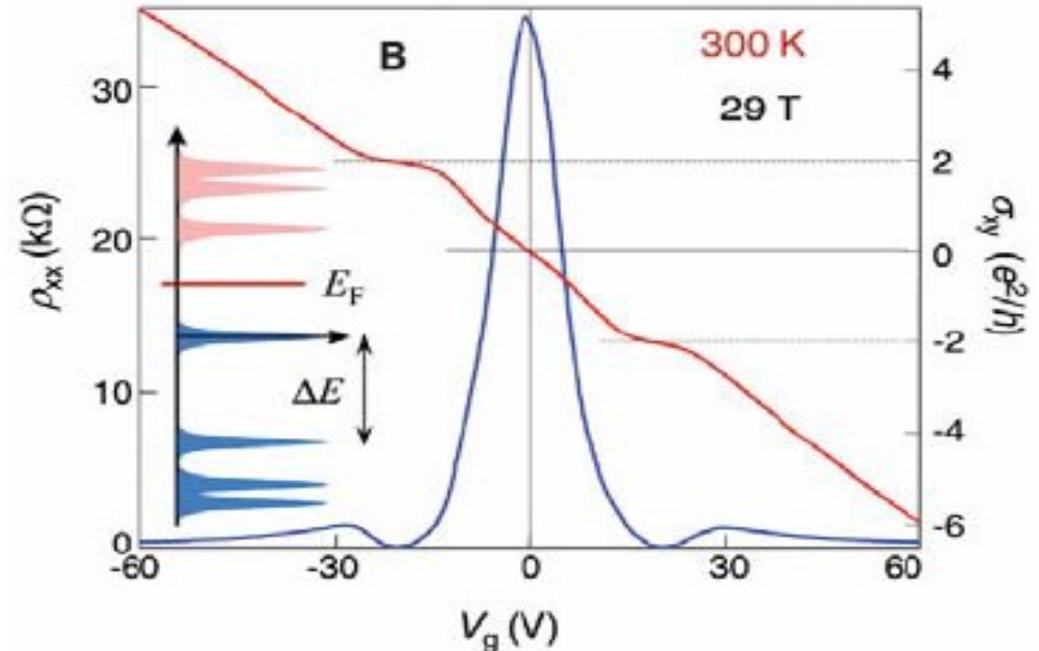
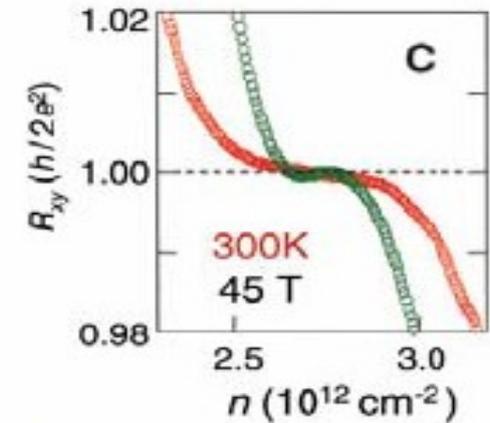
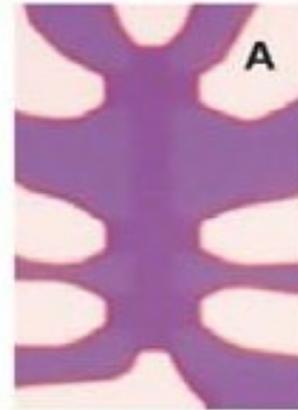
ТОЧНО:

$$\omega_0 = \sqrt{2} V_F \sqrt{\frac{eH}{\hbar c}}$$

$$E_N = \pm \omega_0 \sqrt{N}$$

$$T^* = \frac{\hbar \omega_0}{k} = \frac{V_F}{k} \sqrt{\frac{2 \hbar e H}{c}} \sim 1300 \text{ K}$$

для 10 Тл



(А) оптическая фотография используемого прибора, ширина кадра ~8 мкм
(В) холловская проводимость (красным) и продольное сопротивление (синим) как функции напряжения на затворе в поле 29Т. На вставке схема уровней Ландау для безмассовых дираковских фермионов (С) холловское сопротивление для электронов (красный) и дырок (зелёный).