Национальный исследовательский университет
Высшая Школа Экономики

курс-майнор 2017-2018 уч.года

«Квантовая физика 'для чайников'»

В.Н.Глазков

Лекция 3

Излучение абсолютно чёрного тела

Оглавление

Список литературы

1: John B. West, Barometric pressures on Mt. Everest: new data and physiological significance, 1999

Напоминание: Проблема излучения чёрного тела.

Абсолютно чёрным телом в физике называют тело, которое поглощает все падающее на него излучение. Эта концепция была введена Кирхгофом в 1862 году. Если абсолютно чёрное тело находится в термодинамическом равновесии с окружающей средой, оно не только поглощает излучение, но и излучает само — это просто требование закона сохранения энергии. Из-за этого такое «абсолютно чёрное» тело визуально имеет цвет. Примером может служить раскалённый уголь в печке — на вид он красный, однако он поглощает падающее на него излучение, в чем легко убедиться посветив на него чем-либо. Задача о «цвете» этого собственного излучения (точнее о его спектре) — это одна из важных задач термодинамики и теории электричества.

Й.Стефан (1879, эмпирически) и Л.Больцман (1884, с использованием теории Максвелла) установили закон (закон Стефана-Больцмана) связывающий полный поток излучения от абсолютно чёрного тела с его температурой: $\frac{P}{S}=\sigma T^4$, где σ - т.н. постоянная Стефана-Больцмана. Закон подтвержден экспериментально Л.Гретцем в 1880 году.

В 1893 году В.Вин, используя термодинамику и теорию электричества, вывел первый закон Вина для спектральной плотности излучения черного тела: $\frac{dP}{d\nu}=\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$. Отсюда, в частности следует закон смещения Вина: положение максимума ν_{max} в спектре излучения чёрного тела определяется только его температурой, $\nu_{max}=AT$. За эти работы Вин был удостоен Нобелевской премии по физике 1911 года.

Однако точный вид спектральной функции излучения чёрного тела вывести из классических соображений невозможно. В 1900 году Рэлей вывел спектральную функцию из классических соображений, этот вывод был приведён в более строгую форму Джинсом (1905). Согласно закону Рэлея-Джинса $\frac{dP}{d\nu}=\frac{2\nu^2 kT}{c^2}$. При низких частотах предсказания классической теории соответствуют опыту. Однако, с ростом частоты спектральная плотность $\frac{dP}{d\nu}$ неограниченно возрастает, так что полная излучённая энергия оказывается бесконечно велика. Полученный вывод получил название «ультрафиолетовой катастрофы». Вин на основании эмпирических соображений предложил в 1896 году другой вид спектральной функции, лишённый этой проблемы (второй закон Вина): $\frac{dP}{d\nu}=C_1\nu^3 e^{-C_2\nu/T}$. Но эта формула не описывает правильно низкочастотное поведение, кроме этого, в ней содержатся неизвестные константы C_1 и C_2 .

Применение классической теории приводит к «ультрафиолетовой катастрофе», классическая теория не в состоянии последовательно описать свойства излучения абсолютно чёрного тела.

Задача о гармоническом осцилляторе.

Уровни энергии гармонического осциллятора

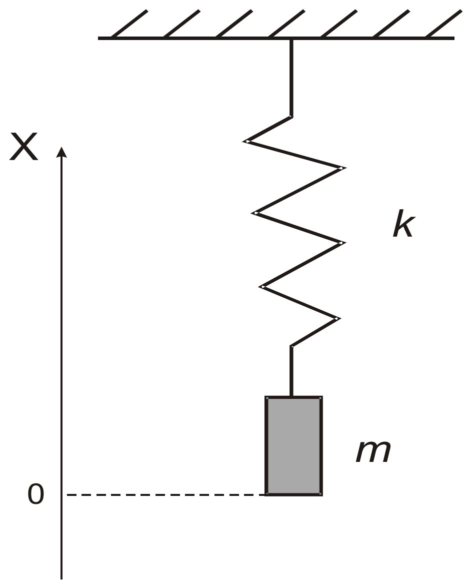

Рисунок 1: Пружинный маятник: простейший пример гармонического осциллятора.

Первая задача, которую мы рассмотрим, это задача об гармоническом осцилляторе. Полученный результат понадобится нам позднее.

Гармоническим осциллятором, в принципе, является любая система с квадратичным минимумом в потенциальной энергии. Для определённости рассмотрим груз массы m, колеблющийся на пружинке жёсткости k в отсутствие силы тяжести (рисунок 1). Нас интересует, каковы могут быть значения энергии, запасённой колебательной системой. Напомним ещё раз, что в классической механике эта энергия может быть произвольна, в то время как в квантовой механике значения энергии в некоторых системах оказываются дискретными. Строгое решение этой задачи требует использование математического формализма квантовой механики, что не входит в наши цели. К счастью, ответ в данном случае можно в основном угадать, пользуясь простыми дополнительными предположениями.

Частота колебаний классического осциллятора находится из закона сохранения энергии:

$$\begin{gathered}\frac{mV^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=const\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}+\frac{kx^2}{2}\right)=0\\ m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+kx\frac{dx}{dt}=0\\ \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0\end{gathered}.$$

Последнее уравнение — это уравнение свободных колебаний, решения которого имеют вид $x=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$, где частота колебаний $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$. В сделанных нами предположениях затухания колебаний и потерь энергии нет, такие колебания могут продолжаться вечно.

Поместим теперь на груз небольшой заряд q. Этот заряд движется ускоренно, поэтому по законам классической электродинамики он должен излучать электромагнитные волны. Причём, как легко заметить, эти волны будут иметь частоту, равную частоте колебаний. Применим теперь к этому излучению гипотезу Планка: излучение энергии происходит порциями-квантами, величина кванта $\Delta E=\hbar\omega_0$. Это означает, что энергия, запасённая в осцилляторе будет уменьшаться не непрерывно, а «ступеньками» величины ΔE. В конце концов вся энергия которую можно излучить будет излучена. Рассмотрев все сделанные «ступеньки» мы приходим к выводу, что энергия, запасённая в осцилляторе, принимает дискретные значения $E_n = n\hbar\omega_0 + E_0$, где $E_0 < \hbar\omega_0$ - это некоторая остаточная энергия, которую также называют энергией нулевых колебаний (точный результат $E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}$). В полученном ответе для запасённой энергии нигде не фигурирует величина заряда q , а значит ответ остаётся в силе и для электронейтрального осциллятора.

Таким образом, энергия, запасённая в колебаниях маятника, может быть равна только некоторым дискретным значениям. Это напоминает дискретные уровни энергии электронов в атоме. Отметим здесь без доказательства, что дискретность уровней энергии является в квантовой механике общим свойством для всех финитных (происходящих в ограниченной области пространства) движений.

Оценим, сколько квантов энергии запасено в привычном нам «бытовом» пружинном маятнике. Возьмём пружину от динамометра жёсткостью примерно $1\text{Н}/\textit{см} = 100\text{Н}/\textit{м}$, подвесим к ней груз массой $10\text{г} = 0.01\text{кг}$. Угловая частота колебаний такого пружинного маятника $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 100\, c^{-1}$. Рассмотрим минимально заметную амплитуду колебаний маятника в $1\text{мкм} = 10^{-6}\,\textit{м}$. Количество квантов энергии, запасённых в колебаниях:

$$N = \frac{kX_{max}^2}{2\hbar\omega_0} = \frac{100\cdot 10^{-12}}{2\cdot 10^{-34}\cdot 100} = 5\cdot 10^{21} \quad .$$

Получено огромное число, сравнимое с числом молекул в одном моле. Эта оценка ещё раз показывает, почему квантовые эффекты так редко наблюдаются в повседневной жизни. Во многих случаях заметить изменение энергии на один квант также сложно, как заметить удар о стенку сосуда отдельной молекулы газа.

Барометрическая формула и понятие о распределении Больцмана

Ненадолго отвлечёмся от квантового осциллятора и рассмотрим одну простую задачу из термодинамики. Найдём как меняется концентрация молекул идеального газа в изотермической атмосфере в поле силы тяжести.

Уравнение состояния идеального газа $P = nkT$, где n — концентрация молекул (число молекул в единице объёма), T — температура, а k — постоянная Больцмана. Если газ находится в поле силы тяжести, то верхние слои дополнительно давят на нижние. Если мысленно выделить в газе слой малой толщины dh (в отличие от математики — не бесконечно малый, толщина слоя должна быть много больше длины свободного пробега, но достаточно мала, чтобы считать концентрацию неизменной внутри слоя), то добавка к давлению на нижний слой за счёт веса этого слоя $dP = -\rho g\, dh = -mng\, dh$, где m — масса молекулы. Знак «минус» соответствует тому, что с ростом высоты h давление уменьшается.

Объединяя эти уравнения с учётом того, что $T = const$, получим

$$dn = -n\frac{mg\,dh}{kT}$$
$$\frac{dn}{n} = -\frac{mg\,dh}{kT} \quad .$$

Получено дифференциальное уравнение, решение которого[1] $n=n_0\exp\left\{-\frac{mgh}{kT}\right\}$, где n_0 — концентрация молекул на уровне $h=0$. Полученное уравнение описывает как меняется плотность газа с высотой. С использованием уравнения состояния можно получить и формулу для давления $P=P_0\exp\left\{-\frac{mgh}{kT}\right\}=P_0\exp\left\{-\frac{\mu g h}{RT}\right\}$, где μ – молярная масса газа, а $R=kN_a$ — газовая постоянная. Несмотря на сделанное приближение о постоянстве температуры ответ получился достаточно близкий к реальности: для высоты Эвереста 8850 метров и температуры атмосферы 273 К эта формула предсказывает давление в $e^{\frac{0.029\times 10\times 8850}{8.31\times 273}}=e^{1.13}\approx 3.1$ раза меньше атмосферного, что прекрасно соотносится с измеренным давлением в 33 кПа [1] (атмосферное давление на уровне моря 100 кПа).

Вернёмся к формуле для концентрации. Молекулы газа находятся в постоянном движении и за достаточно большое время молекула находящаяся на высоте h_1 может перейти в слой на высоте h_2. Если мысленно пометить какую-то молекулу, то через достаточно большое время мы не сможем сказать в каком слое она находится — с некоторой вероятностью эта молекула может быть обнаружена на произвольной высоте. Эта вероятность, как легко сообразить, в силу эквивалентности всех молекул пропорциональна концентрации молекул $w\propto\exp\left\{-\frac{mgh}{kT}\right\}$.

Обратим теперь внимание, что в числителе дроби стоит потенциальная энергия молекулы в поле тяжести. Это позволяет обобщить найденное *распределение вероятности* в виде $w=Ae^{-U/(kT)}$. Оказывается, что это распределение является гораздо более общим, чем барометрическая формула и оно верно для всех систем находящихся в тепловом равновесии.

Полученный результат называется распределением Больцмана: вероятность обнаружить какую-то систему в состоянии теплового равновесия в состоянии с энергией E_i равна $w_i=Ae^{-E_i/(kT)}$, а нормировочная постоянная определяется из условия $\sum_i w_i=1$ (это условие выражает простой факт, что хоть в каком-то состоянии система находится).

Вычисление средней энергии, запасённой в гармоническом осцилляторе.

Нам понадобится для дальнейших применений знать, какая средняя энергия запасена в осцилляторе, находящемся в тепловом равновесии со термостатом при температуре T. Например, если наш пружинный маятник находится в контакте с газом при температуре T. Строго говоря, мы при этом предполагаем наличие некоторого взаимодействия осциллятора с термостатом — но мы будем считать это взаимодействие достаточно слабым, чтобы считать, что возможные значения энергии описываются также, как в идеальном осцилляторе: $E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$.

Для того, чтобы найти среднюю энергию осциллятора необходимо воспользоваться сведениями из термодинамики — необходимо усреднить энергии различных состояний

1 То, что написанное выражение является решением нашего уравнения можно проверить прямой подстановкой. Единственность решения такого уравнения (линейного дифференциального уравнения 1 порядка с одним граничный условием) доказывается в курсах высшей математики, мы в рамках нашего курса примем это «на веру».

осциллятора, используя распределение Больцмана для нахождения вероятности обнаружить осциллятор в n-ом состоянии: $w_n = A \cdot \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)$. Нормировочная константа A определяется из условия $\sum w_n = 1$.

Для простоты расчета выберем энергию основного состояния в качестве точки отсчёта энергии: $E'_n = E_n - E_0 = \hbar\omega_0 n$. Точка отсчёта энергии всегда (в нерелятивистских теориях) является произвольной, важна только разность энергий (для вычисления работы, например). При этом, конечно, необходимо всегда в ходе решения конкретной задачи придерживаться одного выбора.

Определим нормировочный множитель:

$$\sum w_n = 1$$
$$A \sum \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 n}{kT}\right) = 1 \quad .$$

Пользуясь формулой для суммы бесконечной геометрической прогрессии, получаем:

$$A \cdot \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)} = 1$$
$$A = 1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right) \quad .$$

Перейдём теперь к вычислению средней энергии:[2]

$$\overline{E} = A \sum \hbar\omega_0 n \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 n}{kT}\right) = -A \frac{d}{d\left(\frac{1}{kT}\right)} \sum \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 n}{kT}\right) =$$
$$= -A \frac{d}{d\left(\frac{1}{kT}\right)} \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)} = A \quad \hbar\omega_0 \quad \frac{\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)}{\left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)\right)^2} = \frac{\hbar\omega_0}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right) - 1} \quad .$$

Излучение чёрного тела.

Одна из проблем классической физики, как мы уже разбирали на первой лекции, связана с излучением абсолютно чёрного тела. Абсолютно чёрным телом называется объект, который поглощает все падающее на него электромагнитное излучение (на всех частотах). По закону сохранения энергии этот объект должен также и излучать энергию в форме электромагнитного излучения — иначе поглощение падающего излучения приведёт к бесконечному росту температуры. Источником излучаемых электромагнитных волн,

2 В этих вычислениях мы пользуемся тем, что производная суммы равна сумме производных, и замечаем, что исходное выражение является производной от суммы геометрической прогрессии по некоторой переменной. Для математической строгости, отметим, что внос и вынос дифференцирования под знак суммы для бесконечного ряда вообще говоря возможен не всегда, но в данном случае все требования сходимости суммы выполнены и эта операция корректна.

например, могут являться тепловые колебания атомов и ионов в материале из которого «сделано» это чёрное тело. Так как эти колебания случайны, то в спектре этого теплового излучения могут присутствовать всевозможные частоты, никак не связанные с частотой падающего излучения. Таким образом возникает задача о нахождении зависимости спектральной плотности этого *равновесного* теплового излучения (зависимости интенсивности излучения от частоты).

Классическое решение этой задачи (закон Рэлея и Джинкса: $\frac{dP}{d\nu}=\frac{2\nu^2 kT}{c^2}$) приводит к так называемой «ультрафиолетовой катастрофе» — спектральная плотность излучения бесконечно растет с увеличением частоты, так что излучаемая по всему спектру мощность $P_{полн}=\int_0^\infty \frac{dP}{d\nu}d\nu$ обращается в бесконечность.

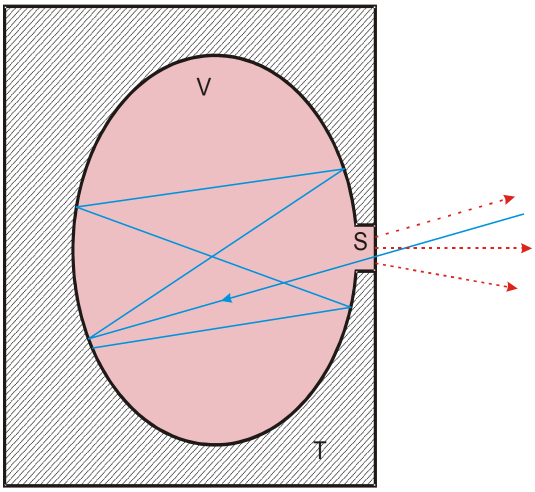

Рисунок 2: Модель абсолютно чёрного тела.

Для анализа этой задачи удобнее рассмотреть немного другую модель абсолютно чёрного тела (рисунок 2). Рассмотрим полость объёма V внутри массивного твёрдого тела, имеющего температуру T . Пусть эта полость сообщается с окружающим пространством отверстием площади S , причём площадь этого отверстия мала по сравнению с площадью стенок полости, а все размеры (в том числе и размеры отверстия) достаточно велики по сравнению с характерными длинами волн, так что эффекты дифракции не существенны. Стенки полости будем считать почти идеально зеркальными. С точки зрения внешнего наблюдателя эта зеркальная полость будет вести себя как абсолютно чёрное тело: луч света идущий извне попадает внутрь полости и после множества отражений поглощается, вероятность того, что он «найдёт» отверстие и уйдёт из полости мала в силу малости площади отверстия. Такой эффект можно часто наблюдать солнечным летним днем, когда на освещённой стене окна домов, за которыми как мы знаем находятся светлые комнаты, кажутся чёрными.

Атомы и ионы материала стенок полости совершают тепловые колебания и излучают электромагнитные волны. Поэтому внутри полости существует электромагнитное излучение. Небольшая часть этого излучения выходит через отверстие в окружающее пространство, сохраняя то же распределение мощности по частоте, что и тепловое излучение внутри полости. Поэтому задача о спектре излучения из отверстия (спектре излучения чёрного тела) эквивалентна задаче о нахождении спектра излучения внутри полости.

Выделим какую-то частоту излучения в полости и рассмотрим колебания электромагнитного поля на этой частоте подробнее. Это излучение пребывает в состоянии динамического равновесия: излучение «новых» волн из-за теплового движения в стенках полости в точности равно поглощению «старых» волн стенками. По гипотезе Планка излучение и поглощение электромагнитных волн происходит квантами. Таким образом, в рассматриваемой нами моде колебаний электромагнитного поля может быть запасено только целое число квантов: $E_n(\omega)=n\hbar\omega$.

Как теперь определить сколько именно квантов энергии запасено в данной моде? Так как излучение пребывает в состоянии динамического (то есть теплового!) равновесия со стенками при температуре T, то ответ на этот вопрос известен из термодинамики: при тепловом равновесии температуры тел равны, а вероятность обнаружить систему с температурой T в состоянии с энергией E_n описывается распределением Больцмана. Таким образом, для нахождения средней запасённой энергии необходимо усреднить энергии различных состояний с помощью распределения Больцмана. Математически это эквивалентно решённой нами задаче о гармоническом осцилляторе, поэтому мы можем сразу написать ответ: $\overline{E}=\frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}$.

Каждое такое колебание можно рассматривать как осциллятор — при этом колеблется весь кристалл на частоте этой звуковой волны. Вклад в энергию электромагнитного поля от каждого осциллятора мы знаем. Необходимо «всего лишь» посчитать количество таких осцилляторов на каждой частоте. Точнее, нам необходимо посчитать, сколько различных мод звуковых колебаний находится в малом интервале частот $d\nu$ вблизи частоты ν. Задача на самом деле не такая безнадёжная. Рассмотрим для простоты полость большого, но конечного объёма. В ней стационарно могут существовать только резонансные моды колебаний, для которых внутри полости может возникать стоячая волна. Каково условие существования стоячих волн?

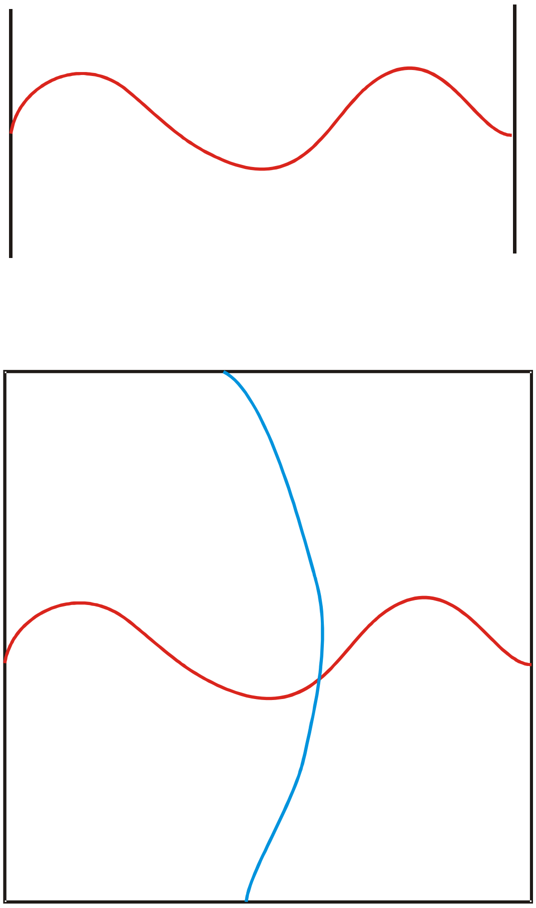

Рисунок 3: Стоячие волны в одномерной (сверху) и двумерной (снизу) задачах.

Это условие не зависит от того, о каких волнах идёт речь: механических, акустических, электромагнитных. В любом случае условие существование стоячей волны сводится к тому, что на границе области существования волны должен быть узел (или пучность, в зависимости от граничных условий) колебаний. То есть, на соответствующем размере должно укладываться целое число полуволн (рисунок 3).

В одномерном случае это приводит к простому условию: $N\frac{\lambda}{2}=L$ или $N=\frac{2L}{\lambda}=\frac{2L\nu}{s}$, где s — скорость звука. Откуда находим искомое количество осцилляторов в интервале $d\nu$: $dN=\frac{2L}{s}d\nu$.

В двух- и трехмерном случае ситуация осложняется тем, что условие попадания узла колебаний на границу должно выполняться по всему периметру (площади) границы области колебаний. Для простоты будем рассматривать «прямоугольную» геометрию. Пример стоячей волны в двумерном случае приведён на рисунке 3. Условие стоячей волны при этом:

$$N\frac{\lambda_x}{2}=L_x$$
$$M\frac{\lambda_y}{2}=L_y$$
.

Строгое решение волнового уравнения дает связь между $\lambda_{x,y}$ и длиной волны в неограниченной среде $\lambda=\frac{s}{\nu}$: $\left(\frac{1}{\lambda_x}\right)^2+\left(\frac{1}{\lambda_y}\right)^2=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\left(\frac{\nu}{s}\right)^2$. В качестве подтверждения такой связи можно отметить, что устремляя одно из измерений прямоугольной области существования колебаний в бесконечность мы получим естественный результат, совпадающий с рассмотренным одномерным случаем. Положим для простоты $L_x=L_y=L$. Тогда условие на длины волн превращается в условие на числа N и M : $N^2+M^2=4L^2\left(\frac{\nu}{s}\right)^2$.

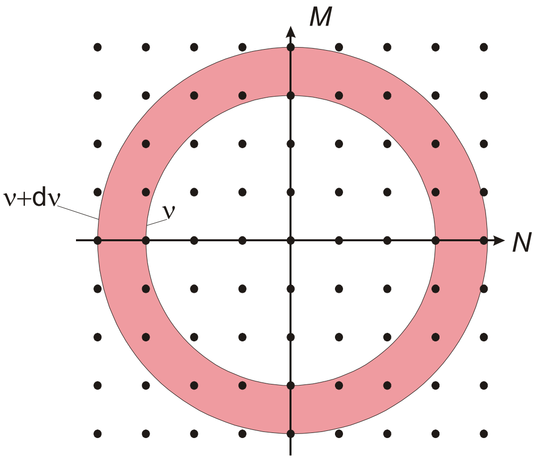

Рисунок 4: К подсчёту числа мод колебаний в двумерном случае.

Для подсчёта количества колебаний, попадающих в интервал $d\nu$ воспользуемся графическими соображениями. Каждая мода колебаний характеризуется двумя целыми числами M и N , которые можно изобразить точкой на плоскости. Получится сетка точек с одинаковым шагом. Условие, связывающее эти числа с частотой колебаний есть уравнение окружности на плоскости. Тогда задача о нахождении количества мод с частотой вблизи заданной колебаний переформулируется как задача о нахождении количества точек сетки, попадающих в кольцо между окружностями радиуса $\frac{2L}{s}\nu$ и $\frac{2L}{s}(\nu+d\nu)$. Если размер L большой (а мы можем выбрать его сколь угодно большим, этот размер введён для нашего удобства), то ответ можно найти из площади кольца, пользуясь тем, что на одну точку приходится единичная площадь:

$$dN=dS=2\pi R\,dR=2\pi\left(\frac{2L}{s}\right)^2\nu\,d\nu\quad.$$

В трёхмерном случае (который нам наиболее интересен) все рассуждения оказываются аналогичными двухмерному, только при подсчёте количества колебаний необходимо рассматривать трёхмерную картину и вычислять объем шарового слоя:

$$dN=4\pi R^2 dR=4\pi\left(\frac{2L}{s}\right)^3\nu^2 d\nu\quad.$$

Как мы знаем, в каждом осцилляторе запасена энергия $\overline{E}=\hbar\omega/\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1\right)$, количество осцилляторов в интервале частот $d\omega$ есть $dN=A\frac{V}{c^3}\omega^2 d\omega$, здесь безразмерная постоянная A включает в себя все геометрические множители (включая нужное количество множителей 2π , возникающих при переходе к угловой частоте), а также количество различных поляризаций колебаний. Её конкретное значение нам сейчас не важно. Для того, чтобы вычислить полную энергию всех колебаний необходимо просуммировать среднюю энергию по всем осцилляторам, то есть проинтегрировать полученные выражения:

$$E=\int \overline{E}\,dN=A\frac{V}{c^3}\int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3\,d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}=A\frac{V}{c^3}\frac{(kT)^4}{\hbar^3}\int_0^\infty\frac{x^3dx}{e^x-1}$$

А спектральная плотность запасённой энергии:

$$\frac{d\,E}{d\,\omega}=A\frac{V}{c^3}\cdot\frac{\hbar\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}$$

Как нетрудно заметить (аналогично подсчёту молекул газа, ударяющихся о стенку сосуда) мощность, излучаемая из отверстия, связана с запасённой энергией:

$$dP=\frac{1}{6}\frac{S\,c}{V}dE\quad .$$

Интенсивность излучения определяется как спектральная плотность мощности на единичную поверхность:

$$I=\frac{1}{S}\frac{dP}{d\nu}=\frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}\quad .$$

Полученный результат — формула Планка для излучения чёрного тела. Этот результат привёл Макса Планка к Нобелевской премии по физике 1918 года. График зависимости спектральной плотности от частоты показан на рисунке 5. Посмотрим к каким ещё результатам для теплового излучения приводит эта формула.

Законы теплового излучения

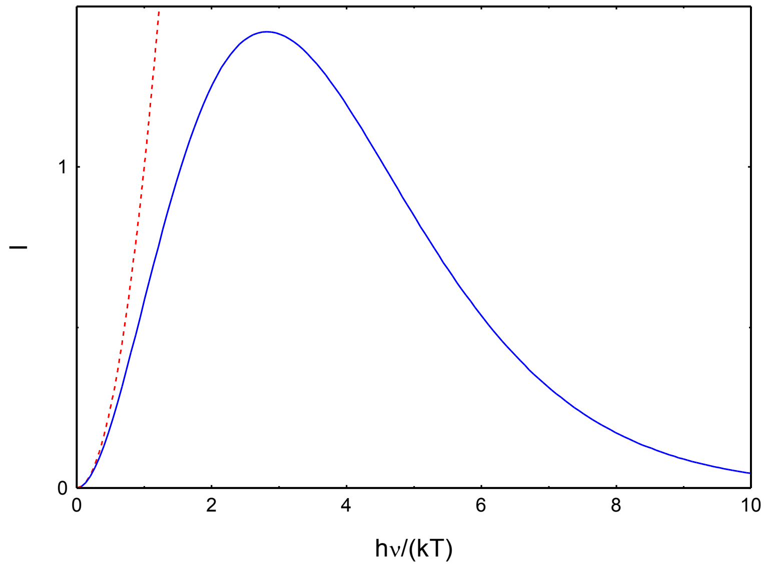

Рисунок 5: Спектральная плотность излучения чёрного тела. Синяя кривая - формула Планка, красный пунктир - классический результат Рэлея и Джинкса.

Зависимость интенсивности излучения от частоты представлена на рисунке 5. При низких частотах $h\nu \ll kT$ это выражение переходит в классический закон Рэлея-Джинкса: $I=\frac{2\nu^2 kT}{c^2}$. При повышении частоты кривая интенсивности имеет максимум, а при больших частотах экспоненциально стремится к нулю. Таким образом, этот результат избавлен от «ультрафиолетовой катастрофы» классической физики.

Положение максимума на кривой определяется только температурой. Его можно найти стандартным образом — продифференцировав уравнение кривой и найдя точку, где производная обращается в ноль:

$$x=\frac{h\nu}{kT};\quad I=const\cdot\frac{x^3}{e^x-1}$$

$$0=\frac{dI}{dx}=const\cdot x^2\frac{3(e^x-1)-x e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$$

$$x=3(1-e^{-x})$$

(решение $x=0$ соответствует минимуму при нулевой частоте). Это уравнение, однако не разрешается аналитически, численное решение даёт ответ:

$$\frac{h\nu}{kT}=2.821 \quad .$$

То есть чем горячее тело, тем более короткие длины волн соответствуют максимуму излучения. На этом эффекте основано и определение температуры звёзд по их цвету в астрономии, и определение температуры металла по цвету раскалённой заготовки в кузнице. Подстановкой констант и переходом к длине волны получаем отсюда формулировку закона смещения Вина:

$$\lambda_{max}=\frac{2898\ \cdot 10^3[нм]}{T[K]} \quad .$$

Напомним, что в 1911 году В.Вину была присуждена Нобелевская премия по физике за открытие законов излучения. В том числе и за этот закон смещения.

Наконец, можно найти полную мощность излучения с единичной площади по всему спектру:

$$P=\int_0^\infty I(\nu)\,d\nu=\frac{2h}{c^2}\int_0^\infty\frac{\nu^3\,d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}=\frac{2k^4T^4}{c^2h^3}\int_0^\infty\frac{x^3\,dx}{e^x-1}=\sigma T^4\quad,$$

получен закон Стефана-Больцмана для теплового излучения. Постоянная Стефана-Больцмана $\sigma=5.67\cdot10^{-8}\frac{Вт}{м^2\cdot K^4}$ не является фундаментальной постоянной — она является комбинацией других констант и некоторых численных множителей. Отметим, что хотя сама постоянная Стефана-Больцмана мала, большая степень, в которой входит температура в закон Стефана-Больцмана, делает тепловое излучение достаточно важным фактором в теплообмене. Например, с квадратного метра тела при температуре 300К (то есть примерно с площади поверхности человеческого тела) излучается мощность примерно 500Вт!

Таким образом, радиационный теплообмен является довольно заметным и с ним приходится бороться в различных системах теплоизоляции. Одним из известных каждому примеров уменьшения этого канала теплообмена является серебрение стенок термоса — зеркальная поверхность и поглощает и излучает гораздо слабее, чем чёрное тело.

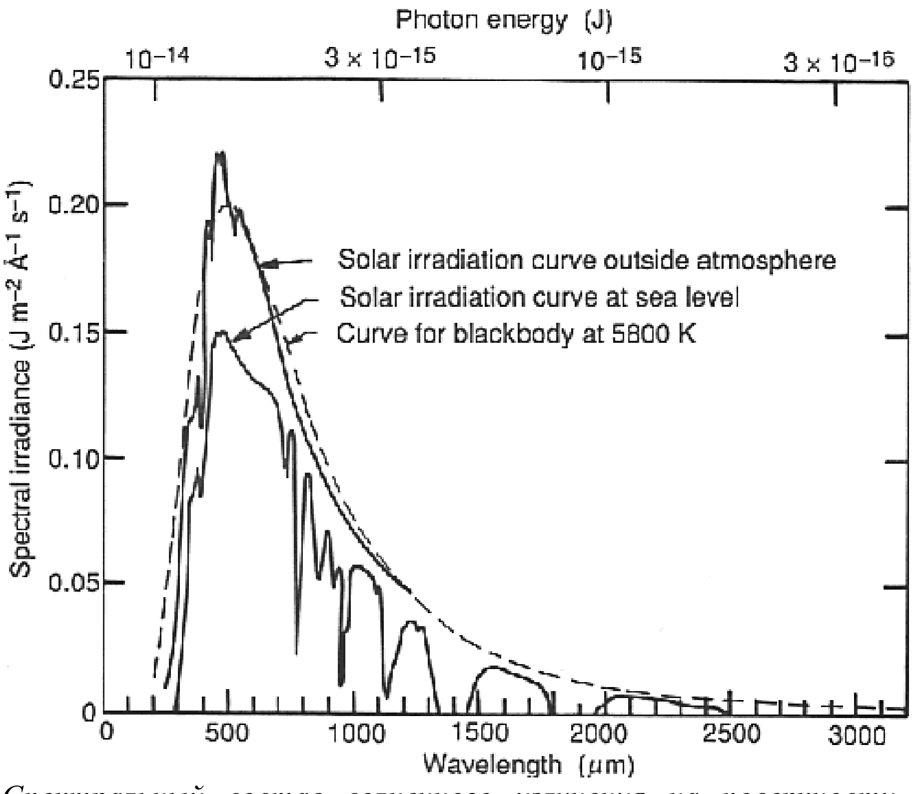

Рисунок 6: Спектральный состав солнечного излучения на поверхности Земли и вне атмосферы и сравнение с моделью излучения чёрного тела с температурой поверхности 5800К. С сайта http://education.gsfc.nasa.gov/experimental/all98invProject.Site/Pages/solarcycles.html

Завершая разговор о тепловом излучении, интересно отметить два важных примера излучения чёрного тела. Первый пример «чёрного тела» мы почти каждый день видим в небе — это наше Солнце. Спектр Солнца на уровне моря изрезан поглощением разными атмосферными газами (пары воды, кислород, углекислый газ), но спектральный состав солнечного излучения вне атмосферы с хорошей точностью описывается моделью чёрного тела с температурой 5800 К. Таким образом по измерению спектра Солнца можно, не уходя с Земли, измерить температуру его поверхности. Второй пример — это так называемое реликтовое излучение. Реликтовое излучение — это кванты излучения, образовавшиеся в первые моменты после Большого Взрыва. Реликтовое излучение практически изотропно и присутствует (согласно модели Большого Взрыва) во всех точках Вселенной. В момент возникновения реликтового излучения оно находилось в тепловом равновесии с горячей плазмой ранней Вселенной и таким образом его спектр соответствует спектру теплового излучения. В ходе расширения Вселенной реликтовое излучение «остывало», в грубой аналогии — подобно остыванию идеального газа при адиабатическом расширении. Можно сказать, что реликтовое излучение это своеобразное «эхо» Большого Взрыва. Реликтовое излучение было экспериментально обнаружено в 1965 году, позднее за это открытие была присуждена Нобелевская премия по физике (1978 год, Пензиас и Вильсон, по 1/4 премии, оставшаяся половина премии была в этот год присуждена П.Л.Капице). Точные измерения спектра реликтового излучения подтвердили, что спектральная плотность реликтового излучения подчиняется закону Планка для теплового излучения черного тела с температурой 2.725К. Максимум спектральной плотности этого излучения находится на частоте 160.4ГГц (длина волны 1.9мм). Из-за наличия реликтового излучения температура любого тела, оставленного в глубоком космосе, не сможет опуститься ниже 2.725К.

Последствия гипотезы Планка для 'классической' физики

Макс Планк выдвинул предположение, что электромагнитное излучение излучается и поглощается дискретными порциями (квантами). Собственно эту гипотезу Планк выдвинул для решения задачи об излучении чёрного тела (позднее мы решим эту задачу), однако значение этой гипотезы быстро вышло за рамки задачи о чёрном теле. Сразу оговоримся, что теперь мы не будем придерживаться исторической последовательности в изложении материала. История помогла нам на прошлой лекции понять, как появлялась квантовая физика, теперь же нам надо понять как связаны понятия квантовой теории с описанием различных физических явлений.
Действительно, если взаимодействие электромагнитного поля и материи происходит путём излучения или поглощения дискретных порций энергии, то и взаимодействие двух тел посредством электромагнитного поля должно подчиняться этим новым квантовым правилам. Но, если посмотреть на многие задачи той же механики, то оказывается, что взаимодействие тел в этих задачах сводится к электромагнитному: например, удар двух тел, происходит из-за электрического взаимодействия атомов (заряженных частиц, составляющих атомы) при сильном сближении этих тел. А это значит, что и в таких чисто механических задачах энергия взаимодействующих тел по крайней мере в некоторых случаях должна изменяться только дискретными порциями.

Таким образом, гипотеза Планка, сформулированная для задачи об излучении, приводит к выводу о дискретности изменения энергии в механике. Но в механике энергия — это очень важное понятие. Дело не только в том, что энергия это сохраняющаяся величина, а в том, что энергия системы (точнее форма зависимости энергии от координат и импульсов) в классической механике полностью определяет динамику системы.

Формализм Гамильтона в классической механике.

Нам со школы привычна запись уравнений динамики в форме второго закона Ньютона: $\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d\vec{p}}{dt}$. Однако у классической механики есть и другие формы записи, эквивалентные ньютоновской.

Одна из этих форм была предложена в 1833 году В.Гамильтоном. Получим уравнения механики в форме Гамильтона (вывод не совсем строгий). Пусть никаких диссипативных сил в рассматриваемой механической системе нет — то есть все силы являются потенциальными (например, силы упругости). Пусть нам известна функция энергии системы:

$$E=E(\{\vec{r}_i,\vec{p}_i\})=K(\{\vec{p}_i\})+\Pi(\{\vec{r}_i\})$$

здесь $K(\{\vec{p}_i\})$ и $\Pi(\{\vec{r}_i\})$ — кинетическая и потенциальная энергии системы, которые являются функциями импульсов (кинетическая энергия) и координат (потенциальная энергия) всех частиц системы. По определению потенциальной энергии, сила действующая на *i*-ую частицу есть:

$$\vec{F}_i=-\frac{\partial\Pi(\{\vec{r}_i\})}{\partial\vec{r}_i}$$

Объединяя это равенство со вторым законом Ньютона и вспоминая, что кинетическая энергия явно от координат не зависит, получаем:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt}=-\frac{\partial E(\{\vec{r}_i,\vec{p}_i\})}{\partial\vec{r}_i}$$

Вспоминая, что $K(\{\vec{p}_i\})=\sum\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2\text{m}}$, можно написать тождество

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\vec{V}_i=\frac{\partial K(\{\vec{p}_i\})}{\partial\vec{p}_i}=\frac{\partial E(\{\vec{r}_i,\vec{p}_i\})}{\partial\vec{p}_i}\quad.$$

Полученные уравнения называют уравнениями Гамильтона. Эти уравнения полностью определяют динамику в задаче классической механике:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt}=-\frac{\partial E(\{\vec{r}_i,\vec{p}_i\})}{\partial\vec{r}_i}$$
$$\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\frac{\partial E(\{\vec{r}_i,\vec{p}_i\})}{\partial\vec{p}_i}$$

Мы получили их из уравнений Ньютона, можно проделать все рассуждения наоборот и получить из них уравнения Ньютона.

Уравнения Гамильтона являются одной из эквивалентных форм записи уравнений классической механики. И, как и положено уравнениям классической механики, они сохраняют свойства детерминизма: если задан вид энергии (задан закон взаимодействия всех тел) и заданы точно все начальные координаты и импульсы, то мы можем (в принципе) решить эти уравнения и найти положения частей системы в любой момент времени.

Отказ от детерминизма в квантовой теории.

Ранее мы показали, что из гипотезы Планка с необходимостью следует вывод о том, что по крайней мере в некоторых задачах механики энергия изменяется дискретно (квантами). Однако, уравнения классической физики, полученные нами выше, предполагают *дифференцируемость* энергии, что по известной математической теореме означает *непрерывность* энергии, как функции координат и импульсов. Противоречие этих двух выводов показывает, что гипотеза Планка, строго говоря, несовместима с классической механикой.