MIPT MOSCOW INSTITUTE OF PHYSICS AND TECHNOLOGY

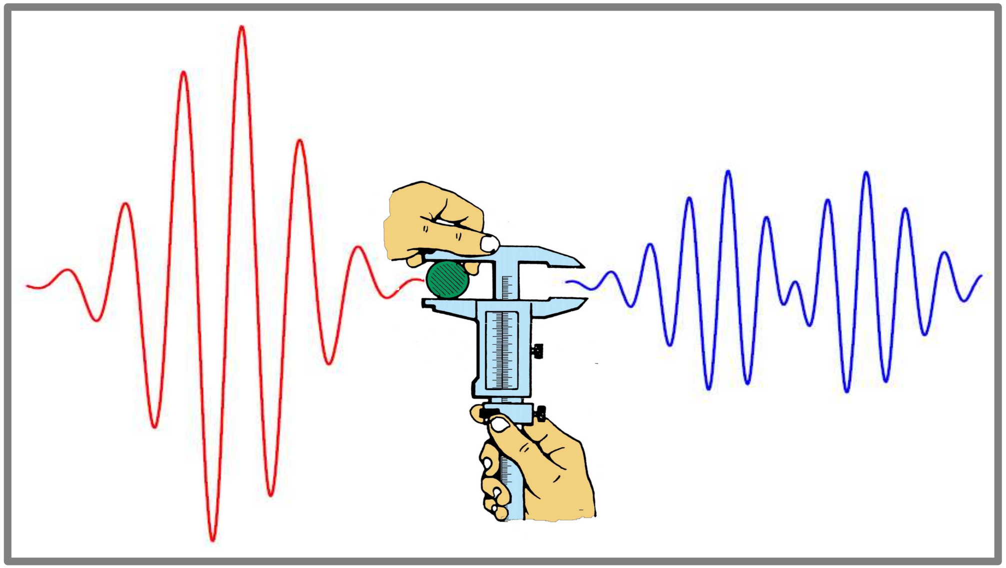
Лекция 4. Потенциальные барьеры и потенциальные ямы

В.Н.Глазков, МФТИ 2022

Напоминание: Основы формализма квантовой механики

$$\Psi(x):\begin{cases} w(a<x<b)=\int\limits_a^b \Psi^*\Psi\,dx \\ \vec{j}=\dfrac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi-\Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right)\end{cases}$$

для плоской волны: $j=\dfrac{\hbar k}{m}|\Psi|^2$



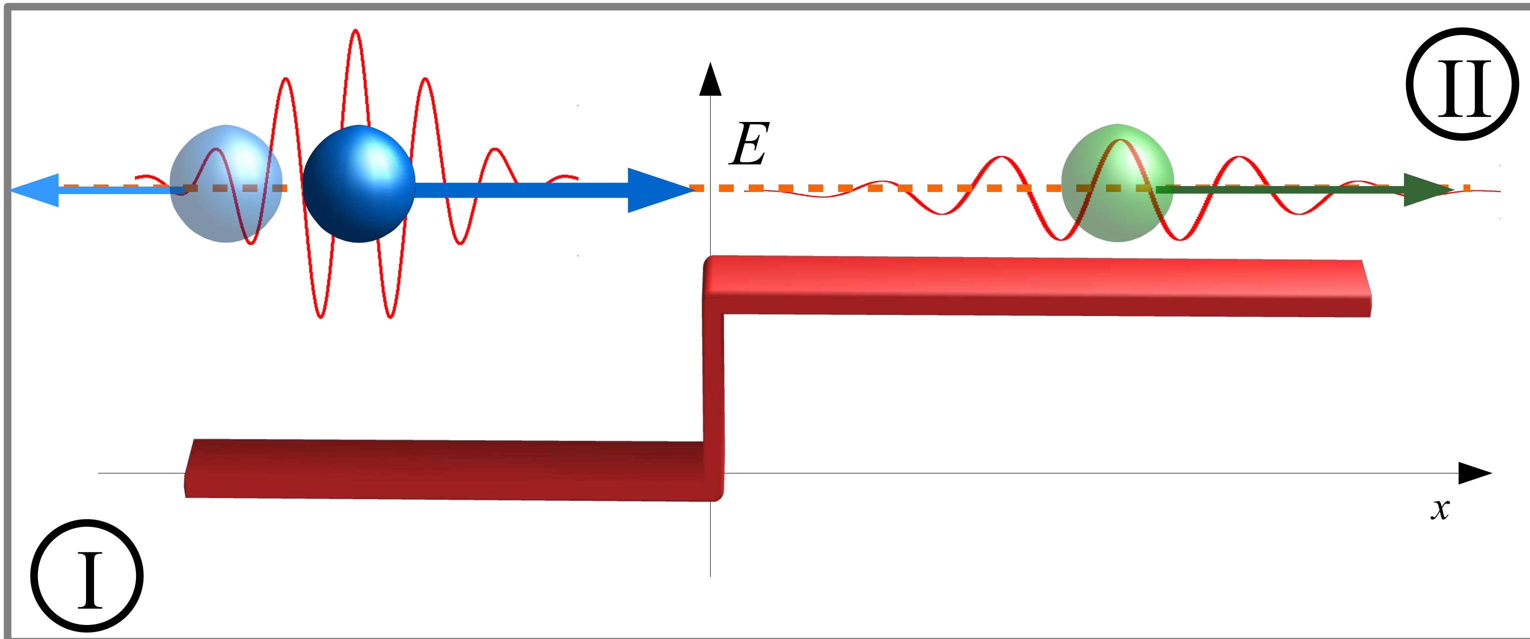
$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\hat{H}\Psi$$

$$\hat{H}\Psi=E\Psi$$

$$\hat{H}=\frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2m}+U(\vec{r})$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi+\left(E-U(\vec{r})\right)\Psi=0$$

Задача о «бесконечном» барьере



$$R = \frac{j_{\text{отр}}}{j_{\text{пад}}} = |A|^2 = \left(\frac{k - k'}{k + k'}\right)^2$$

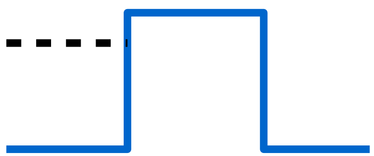
$$T = \frac{j_{\text{прош}}}{j_{\text{пад}}} = \frac{k'}{k}|B|^2 = \frac{4kk'}{(k + k')^2}$$

$$R + T = 1$$

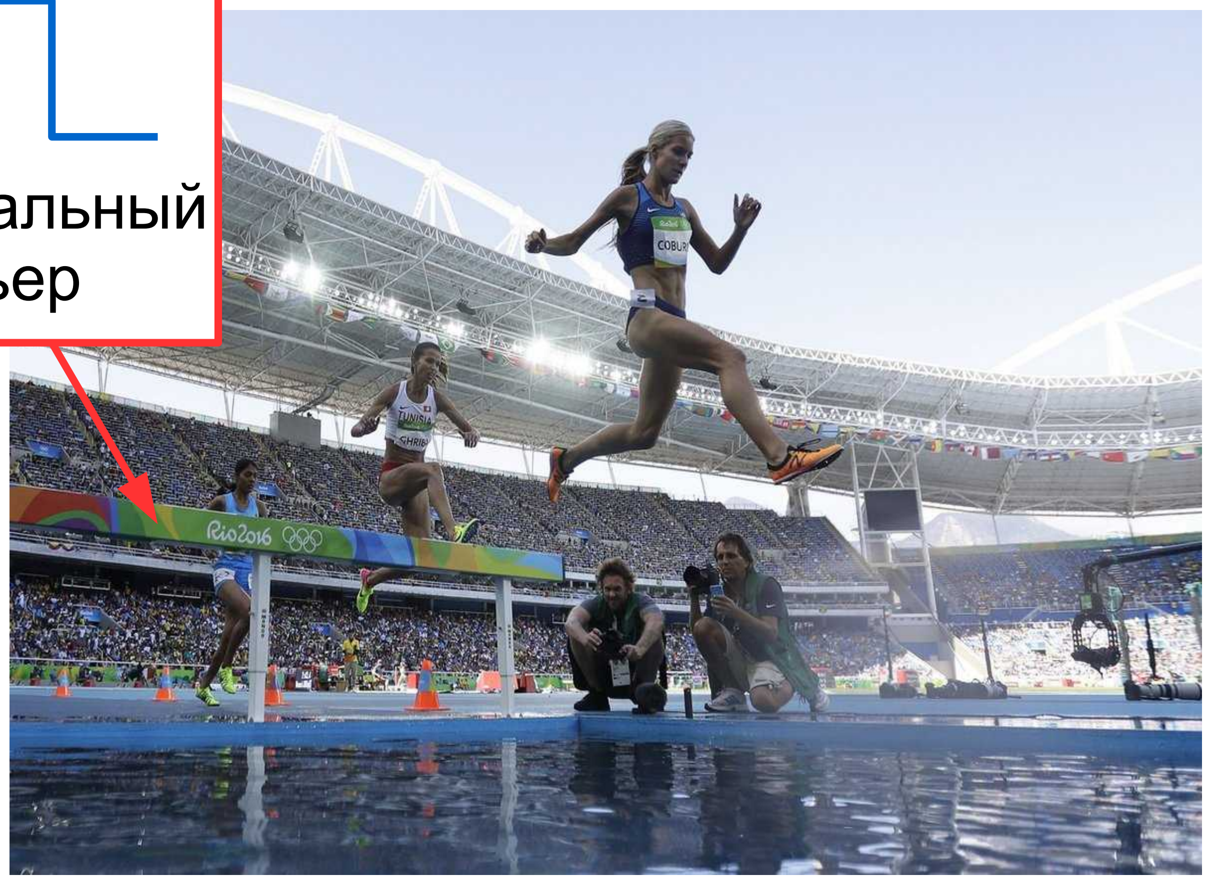
https://img.fotokonkurs.ru/cache/photo_1500w/photos/2016/03/22/3/c3ed29671412ad14acb00f143c101cea/2a565a5bef35478d88af858a02d7dc0c7f75b2c6.jpg

Квантовая задача о яме и барьере

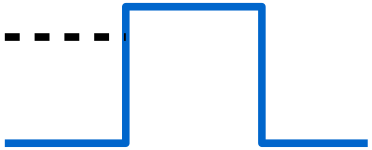
Квантовая задача о яме и барьере



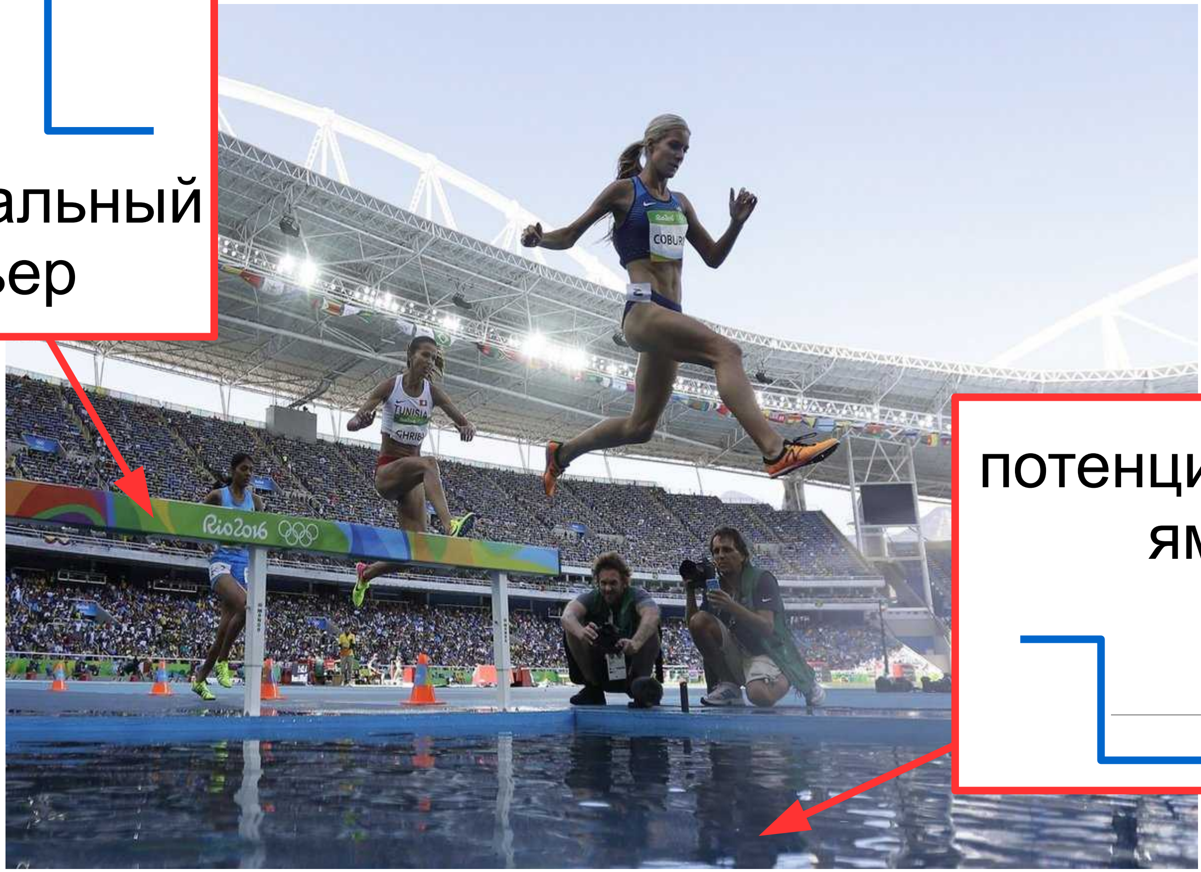
потенциальный барьер



Квантовая задача о яме и барьере

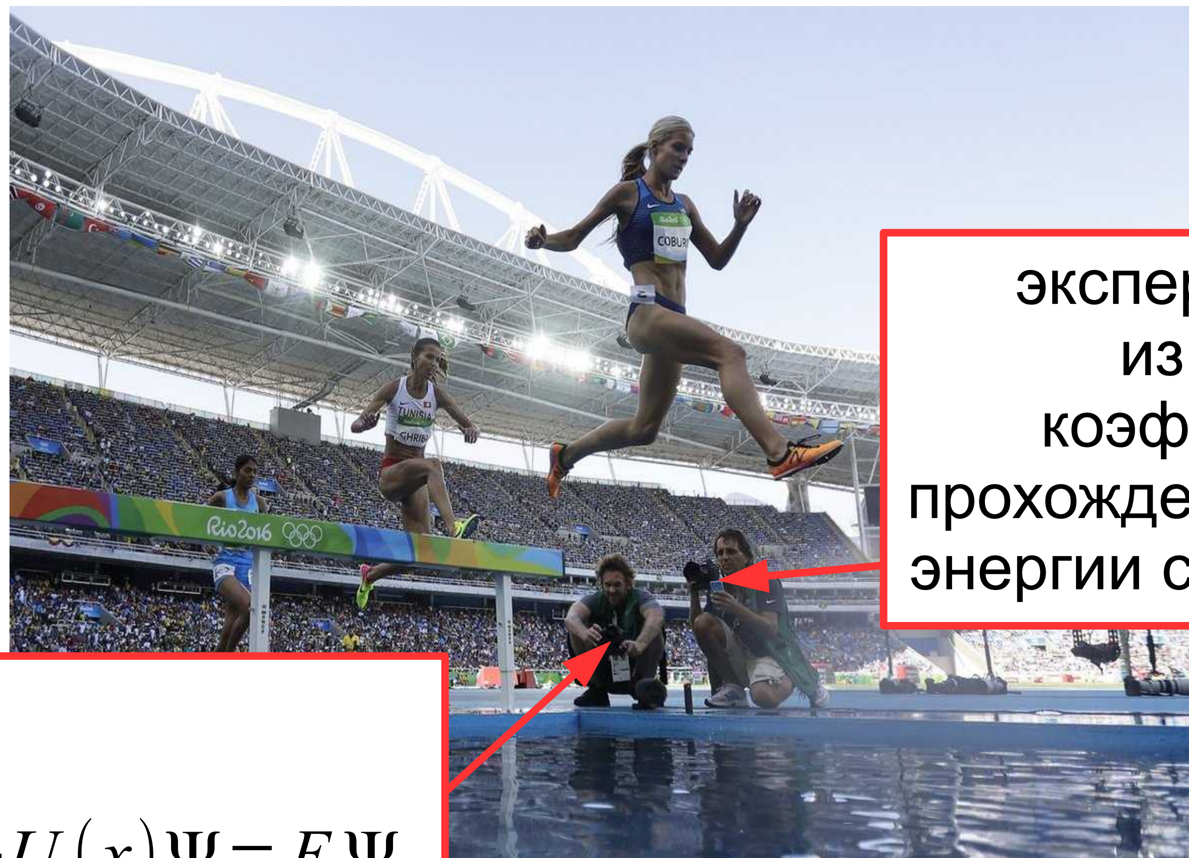


потенциальный барьер



потенциальная яма

Квантовая задача о яме и барьере



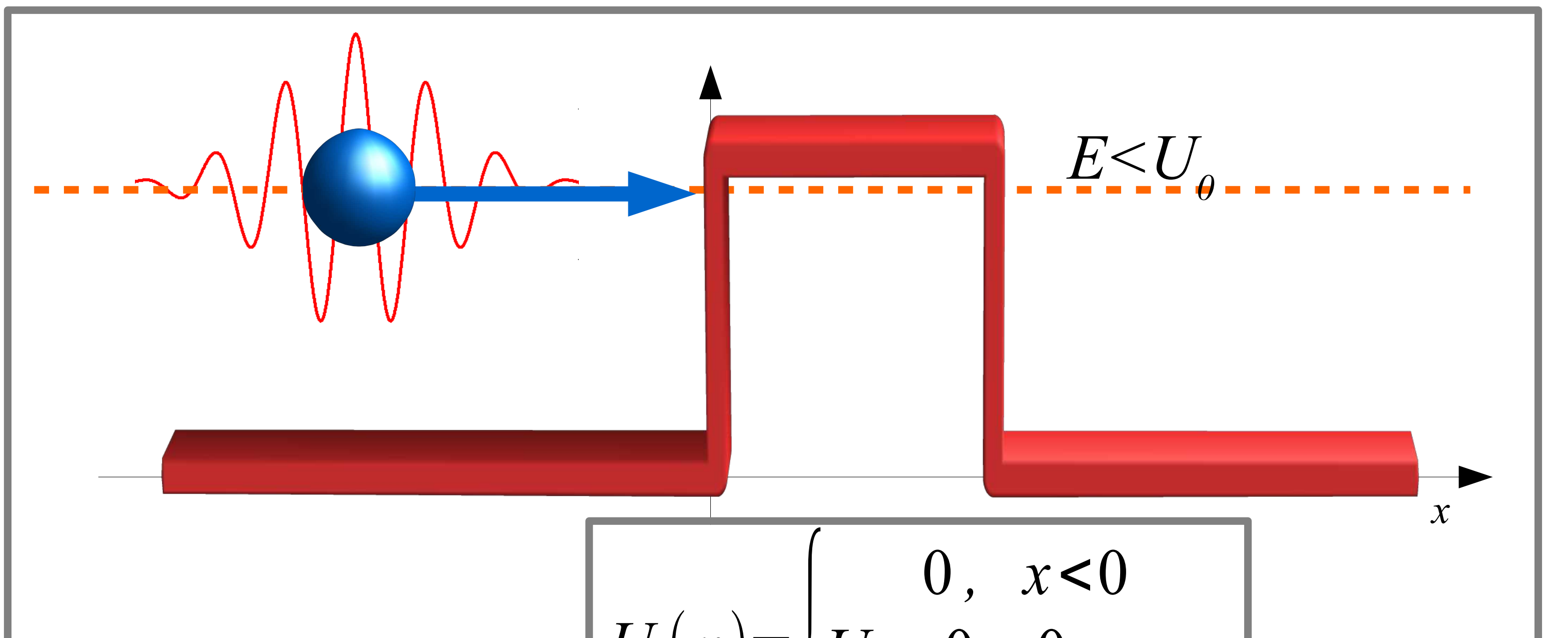
экспериментатор:
измерение
коэффициентов
прохождения/отражения,
энергии состояний в яме

теоретик

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi+U(x)\Psi=E\Psi$$

Часть 1: Подбарьерное туннелирование

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' + \left(E - U(x)\right)\Psi = 0$$



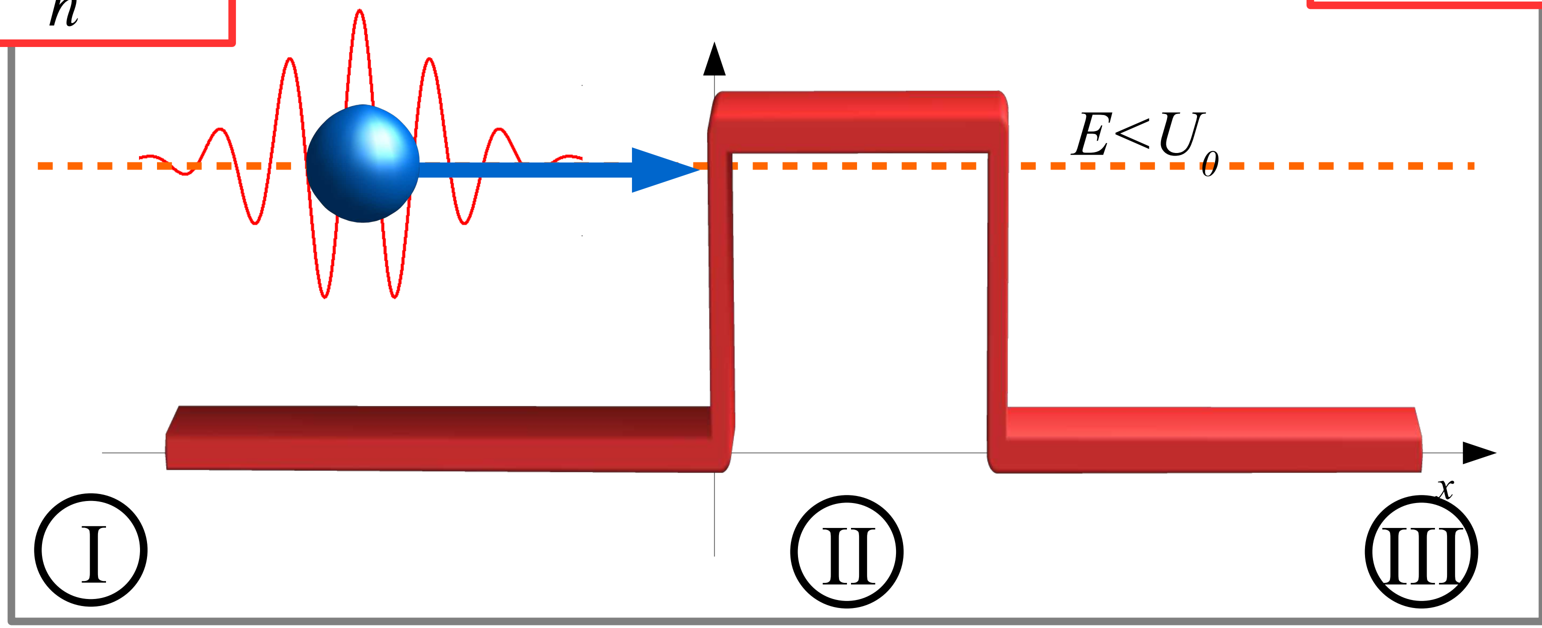
$$U(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ U_0>0, & 0<x<a \\ 0, & x>a \end{cases}$$

Подбарьерное туннелирование

$$\Psi_I = e^{ikx} + Ae^{-ikx}$$
$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\Psi_2 = B_1 e^{\kappa x} + B_2 e^{-\kappa x}$$
$$\kappa = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$$

$$\Psi_{III} = C e^{ikx}$$



$$C e^{ika} = \frac{1}{ch(\kappa a) + i\frac{\kappa^2 - k^2}{2\kappa k}\, sh(\kappa a)}$$

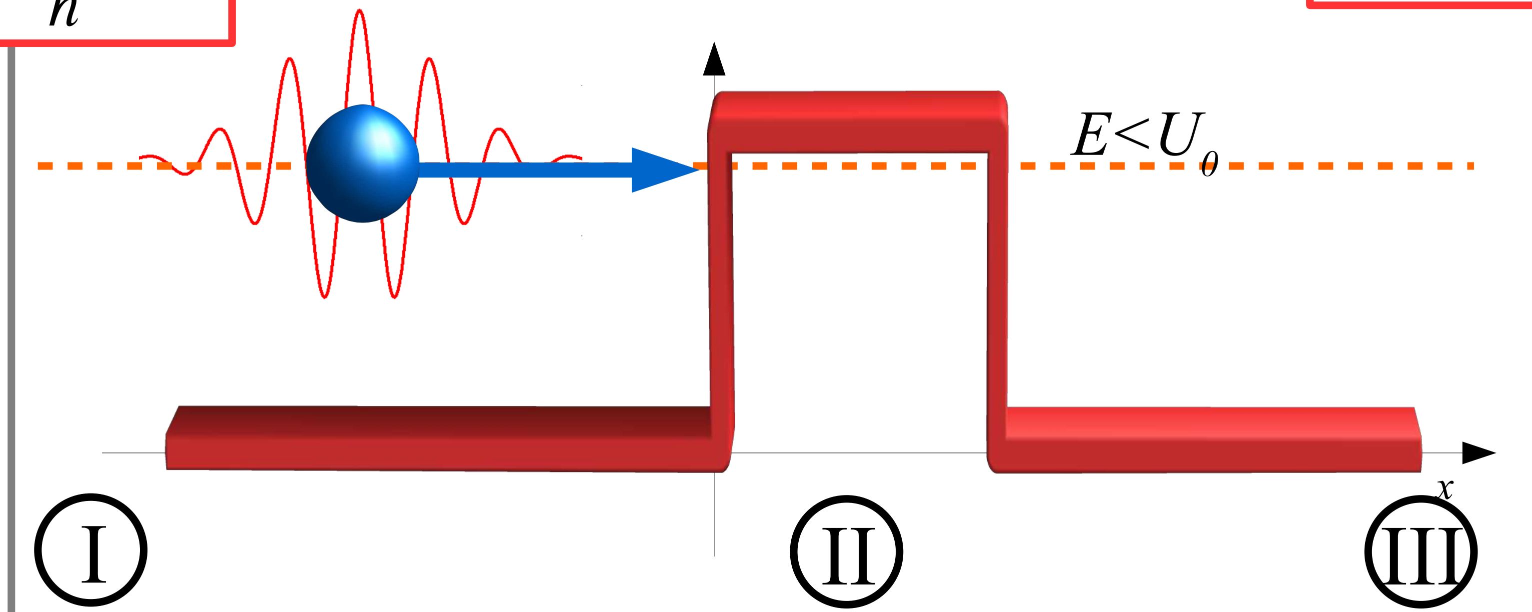
коэффициент прохождения

$$T = \frac{j_{прош}}{j_{пад}} = \left|C e^{ika}\right|^2 = \frac{1}{1+\frac{(k^2+\kappa^2)^2}{4\kappa^2 k^2}\, sh^2(\kappa a)} = \frac{1}{1+\frac{U_0^2}{4E(U_0-E)}\, sh^2(\kappa a)}$$

Ψ_I

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\Psi_{III} = C e^{ikx}$$

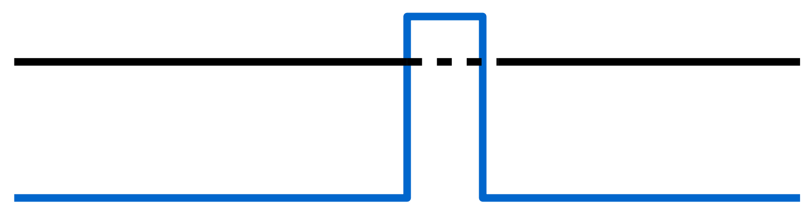


Предельные случаи для туннелирования

$$T = \frac{1}{1 + \frac{U_0^2}{4E(U_0 - E)} sh^2(\kappa a)}$$

$(\kappa a) \gg 1$

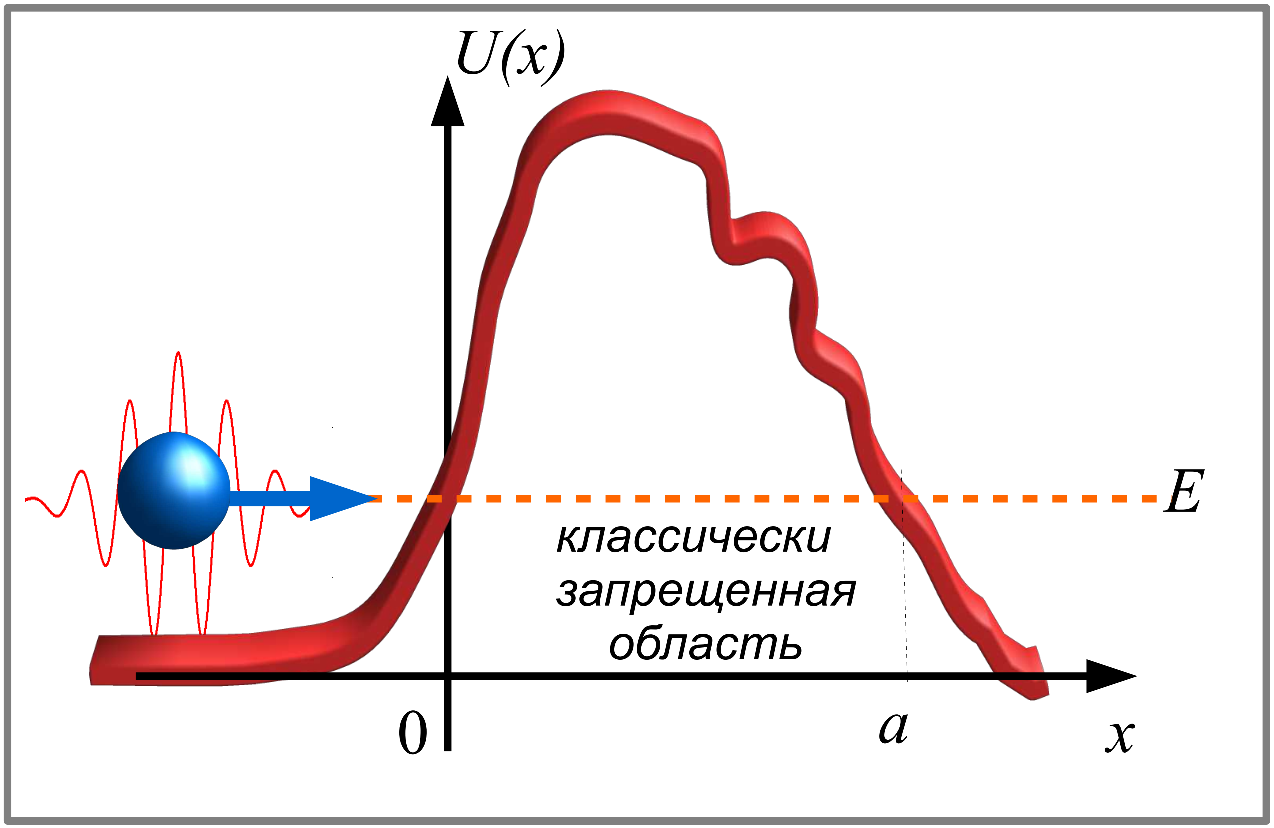
$(\kappa a) \ll 1$



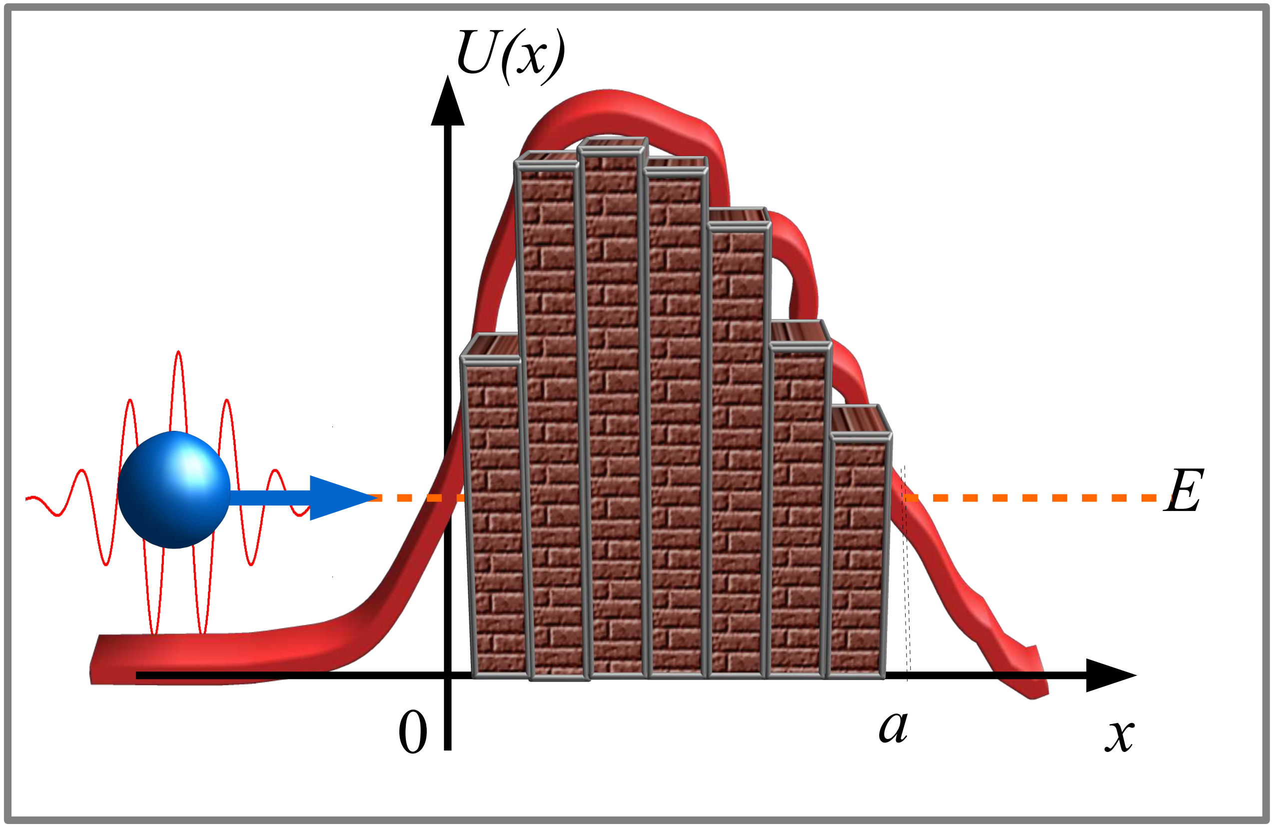
$$T \approx \frac{16E(U_0 - E)}{U_0^2} e^{-2\kappa a} \simeq e^{-2\kappa a}$$

$$T \approx \frac{1}{1 + \frac{m a^2 U_0^2}{2\hbar^2 E}}$$

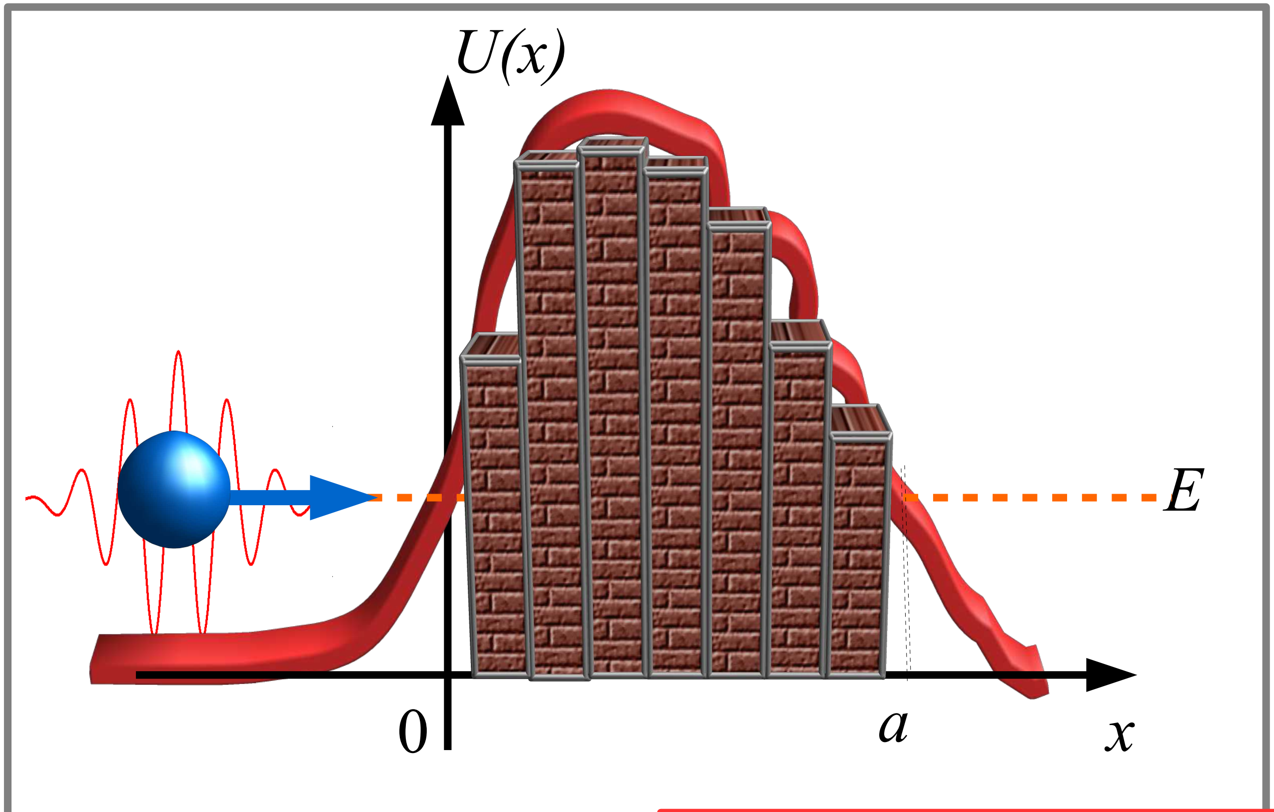
Высокий барьер «произвольной» формы



Высокий барьер «произвольной» формы

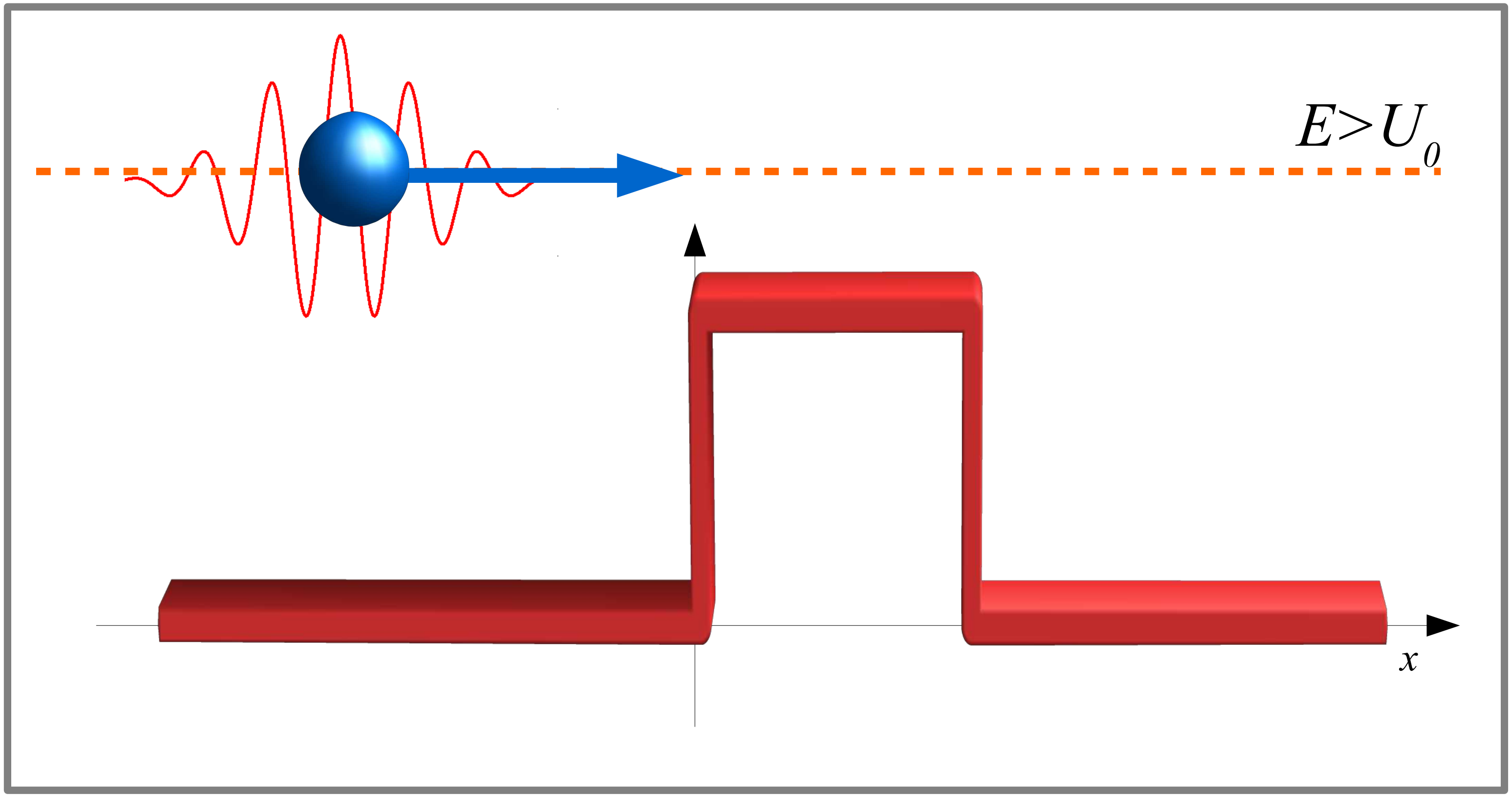


Высокий барьер «произвольной» формы



$$T \sim \exp\left(-2\int_a^b \frac{\sqrt{2m(U(x)-E)}}{\hbar}\,dx\right)$$

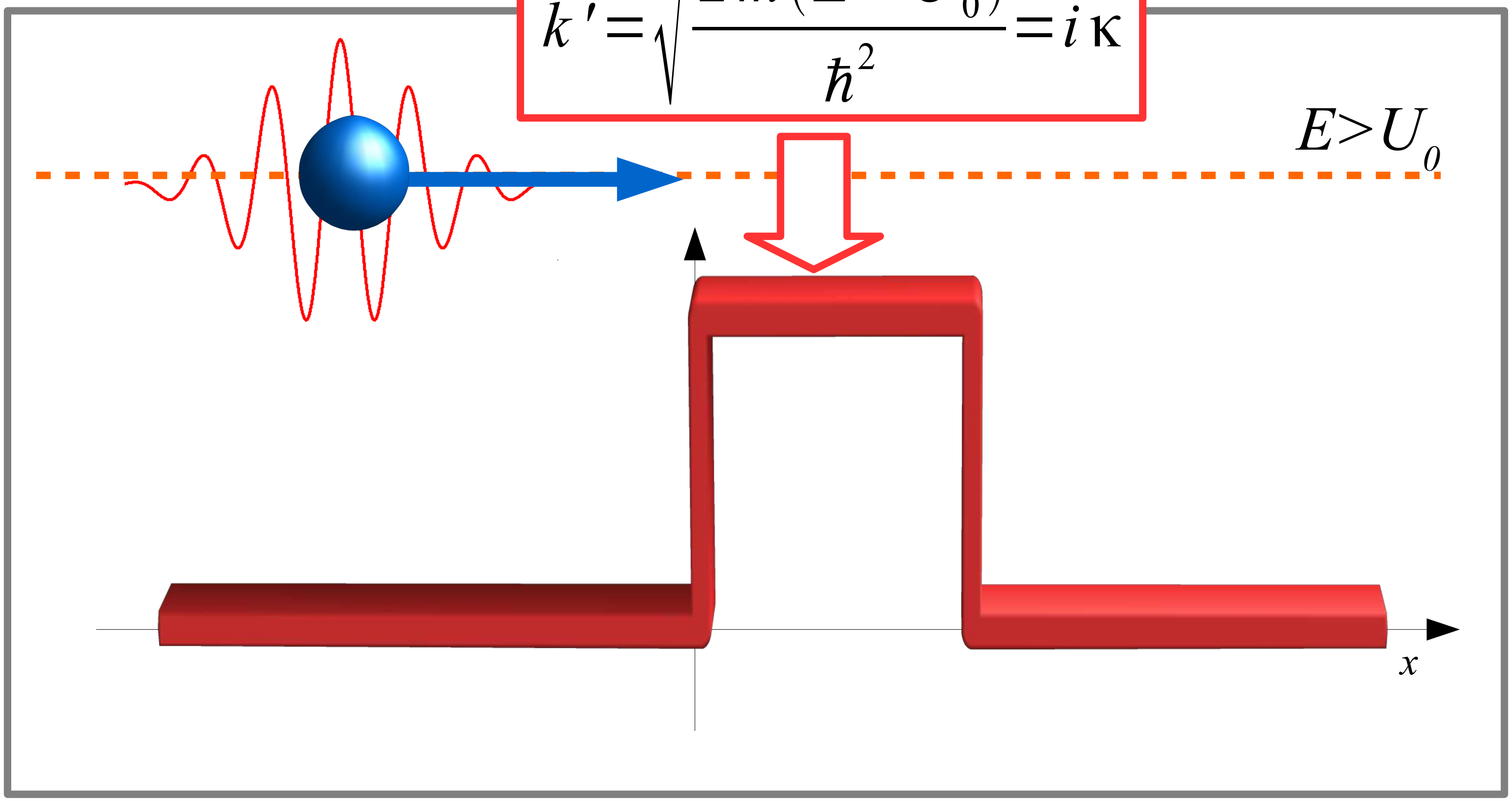
Бонус: надбарьерное отражение



Бонус: надбарьерное отражение

$$\Psi = B_1 e^{ik'x} + B_2 e^{-ik'x}$$

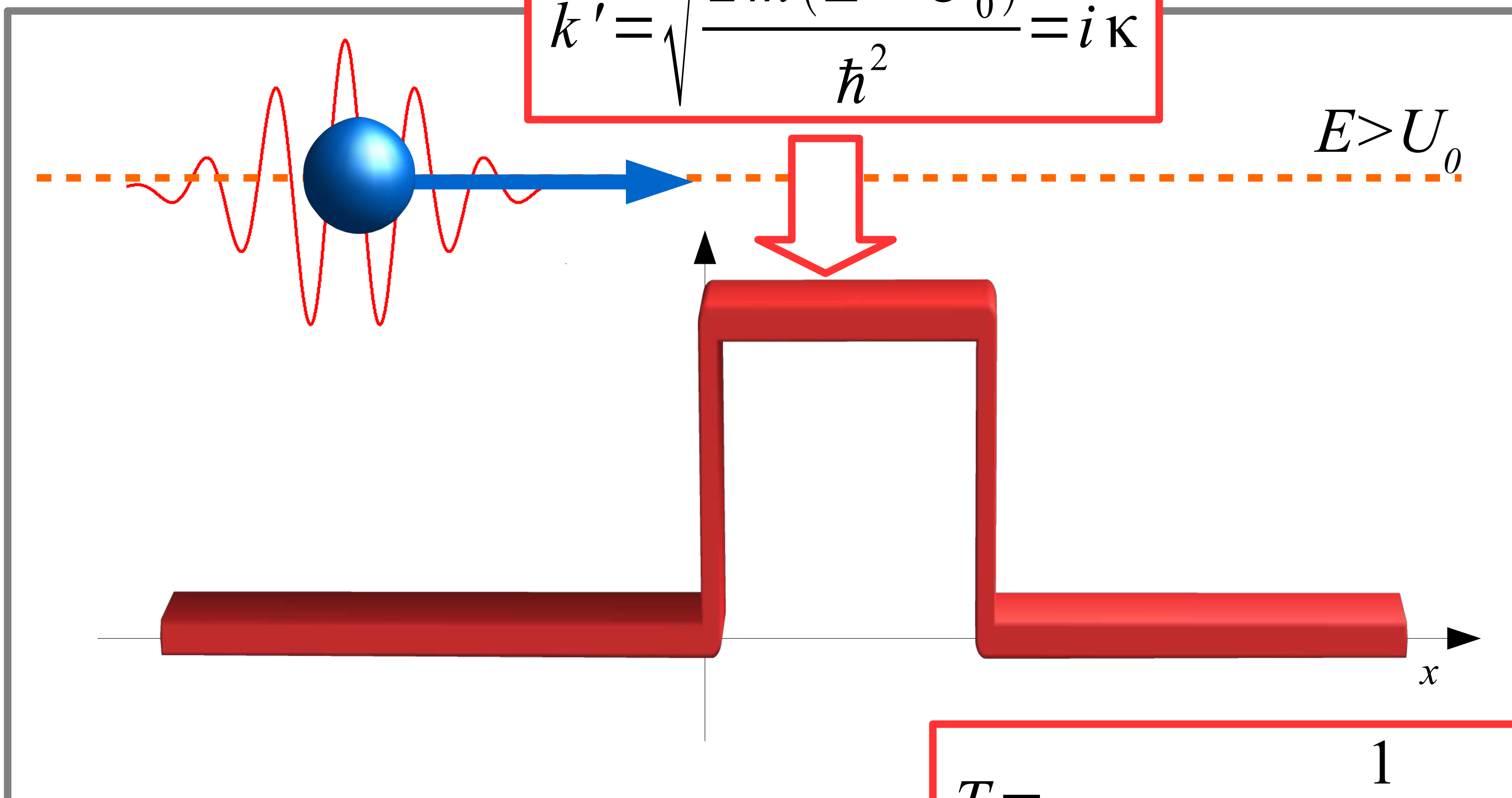
$$k' = \sqrt{\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}} = i\kappa$$



Бонус: надбарьерное отражение

$$\Psi = B_1 e^{ik'x} + B_2 e^{-ik'x}$$

$$k' = \sqrt{\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}} = i\kappa$$

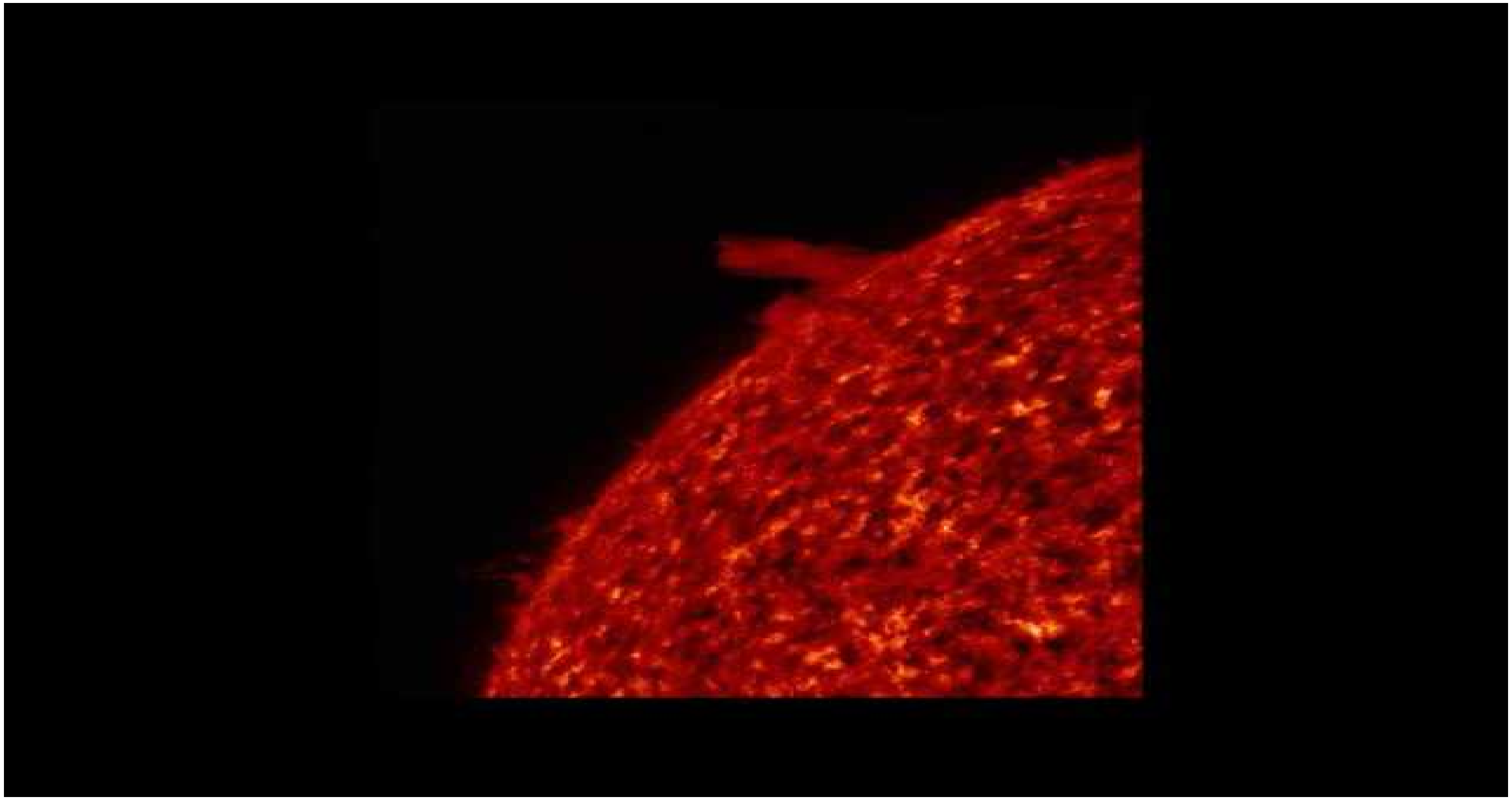


$$T = \frac{1}{1 + \dfrac{U_0^2}{4E(E-U_0)}\sin^2(k'a)}$$

Часть 2: Проявление и применение эффекта подбарьерного туннелирования

- Реакции ядерного синтеза
- Альфа-распад
- Туннельные контакты проводников и туннельный микроскоп

Реакции ядерного синтеза: звезды

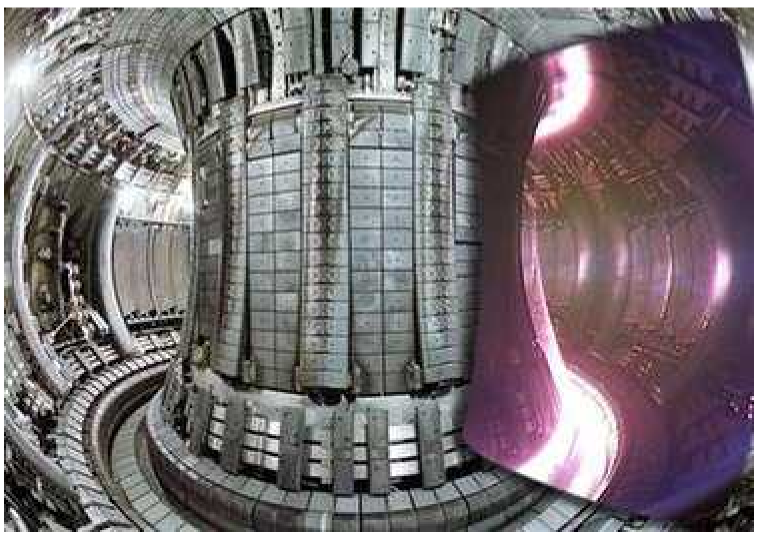


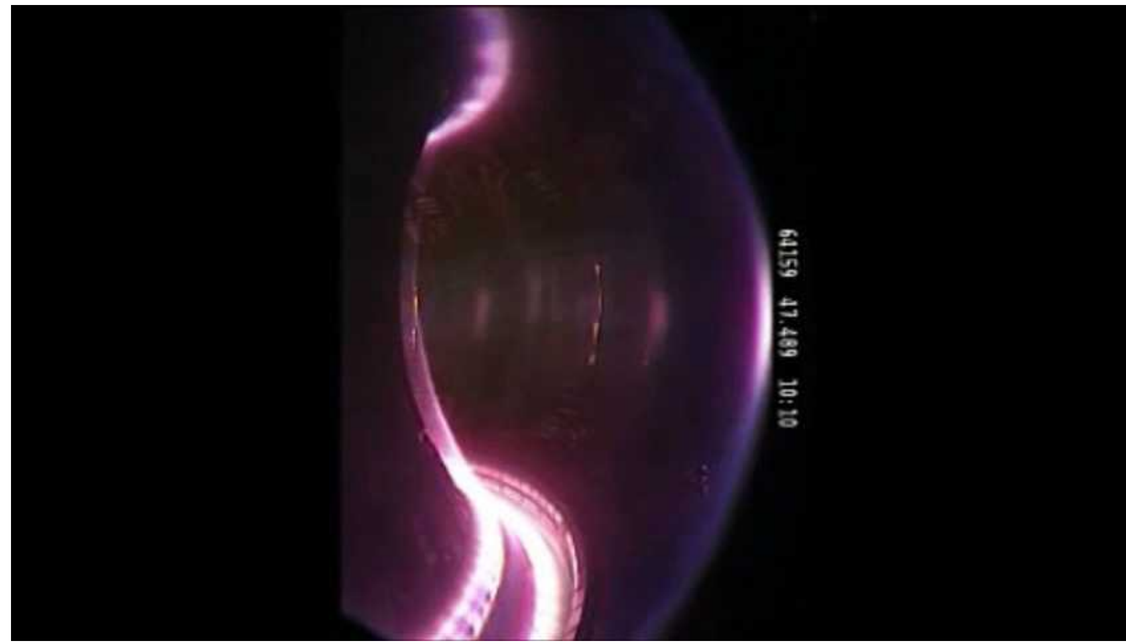
$$\boxed{p + p \rightarrow {}^{2}\mathrm{D} + e^{+} + \nu_{e} + 0.42\,\text{МэВ}}$$

$$\boxed{T_{\text{ядра}} \simeq 15 \times 10^{6}\,\text{K} \simeq 14\,\text{кэВ}}$$

NASA, JPL Photojournal, https://photojournal.jpl.nasa.gov/animation/PIA22199

Реакции ядерного синтеза: ТоКаМаК





$$\boxed{{}^{2}\mathrm{D} + {}^{3}\mathrm{T} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + n + 17.6\ \text{МэВ}}$$

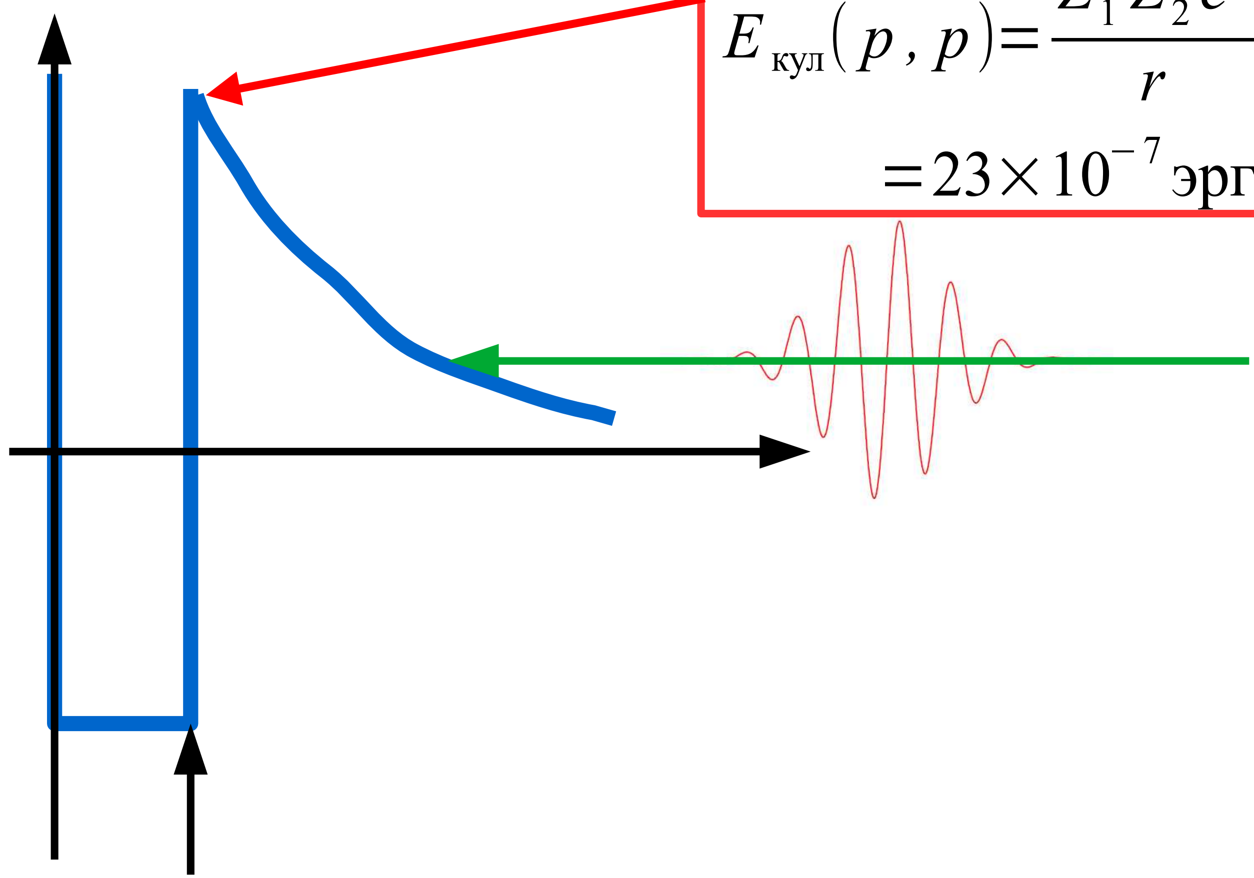
$$\boxed{T_{\text{плазмы}} \simeq 150 \times 10^{6}\ \text{К} \simeq 140\ \text{кэВ}}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Joint_European_Torus

https://www.youtube.com/watch?v=Z3IKaGR9EVs

Потенциал взаимодействия ядер при синтезе и туннельный эффект

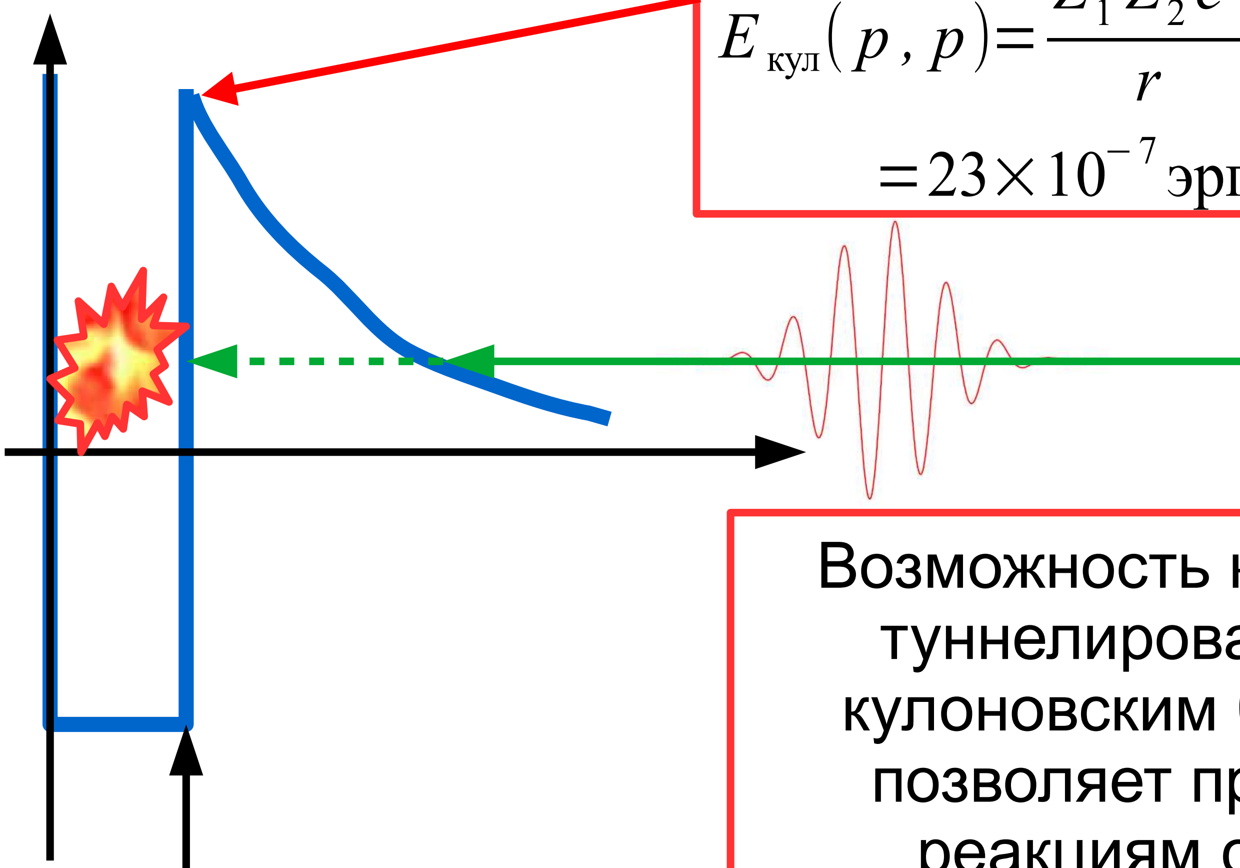
$$E_{\text{кул}}(p,p)=\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}=\frac{\left(4.8\times 10^{-10}\right)^2}{10^{-13}}\ \text{эрг}=$$
$$=23\times 10^{-7}\ \text{эрг}=1.5\ \text{МэВ}\gg T$$



размер ядра ~1 фм

Потенциал взаимодействия ядер при синтезе и туннельный эффект

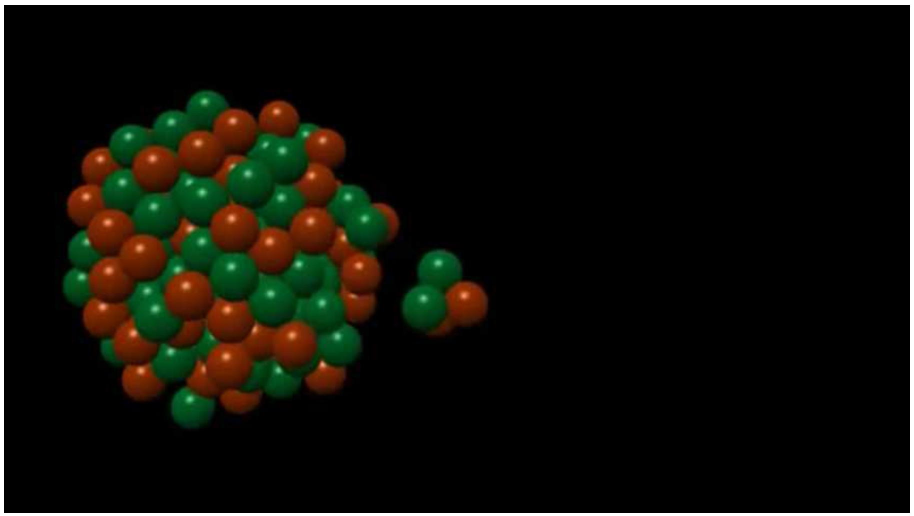
$$E_{\text{кул}}(p,p) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} = \frac{\left(4.8\times10^{-10}\right)^2}{10^{-13}}\ \text{эрг} =$$
$$= 23\times10^{-7}\ \text{эрг} = 1.5\ \text{МэВ} \gg T$$



размер ядра ~1 фм

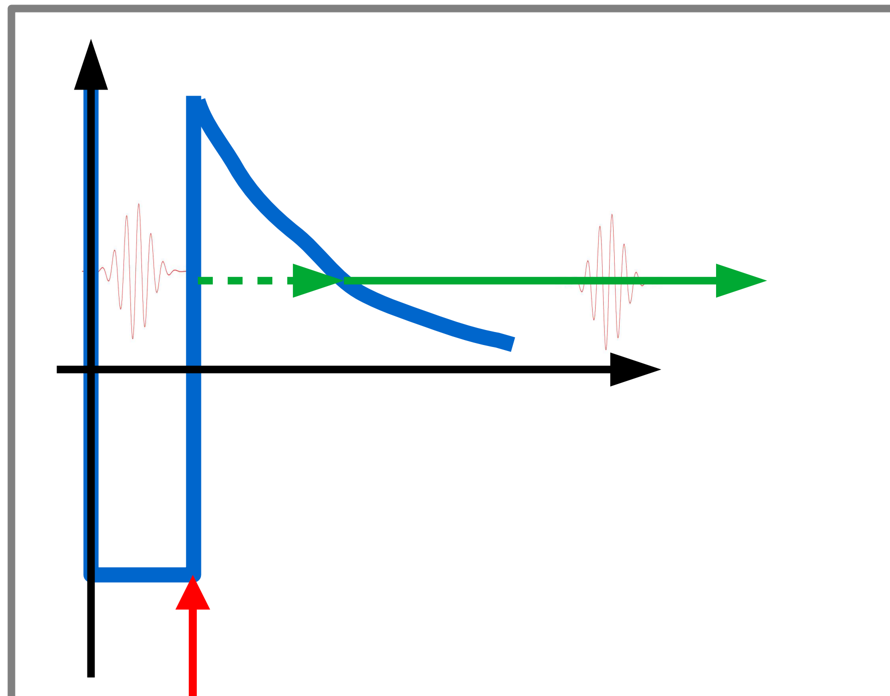
Возможность квантового туннелирования под кулоновским барьером позволяет проходить реакциям синтеза

Альфа-распад тяжелых ядер



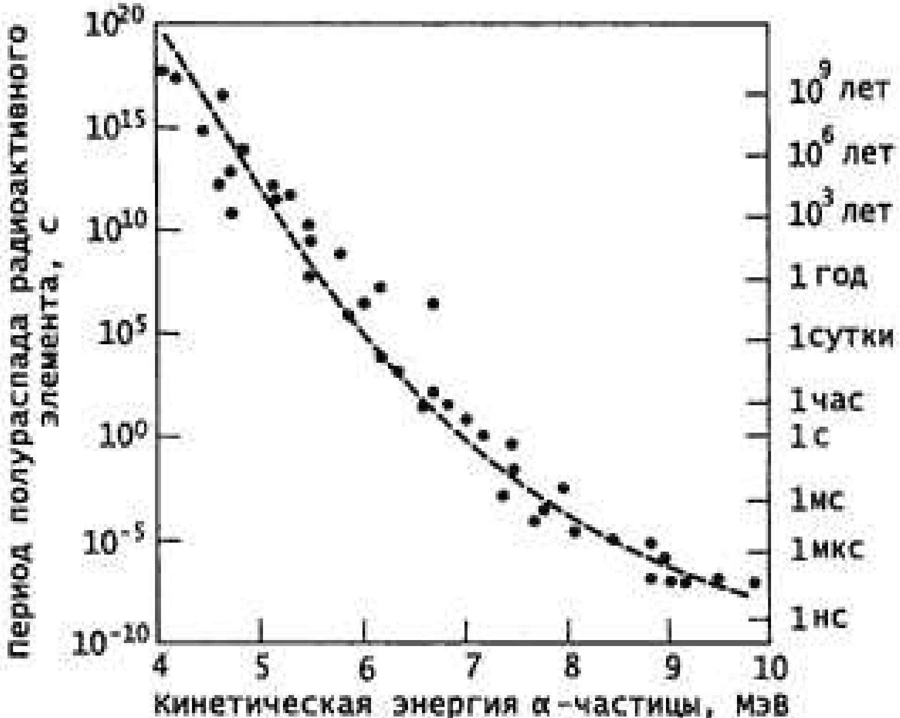
https://gfycat.com/darlingskinnyarieltoucan

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He $$

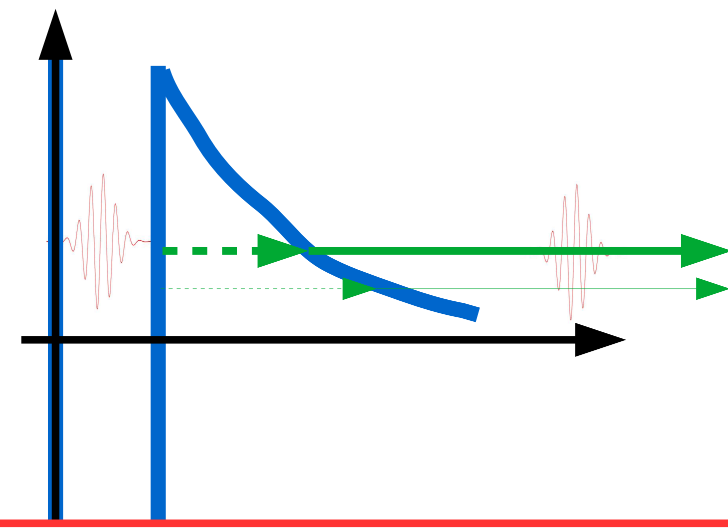


$$ E_{\text{кул}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \sim 100\ldots200\ \text{МэВ} \gg E_{\alpha} \sim 1\ldots10\ \text{МэВ} $$

Альфа-распад тяжелых ядер



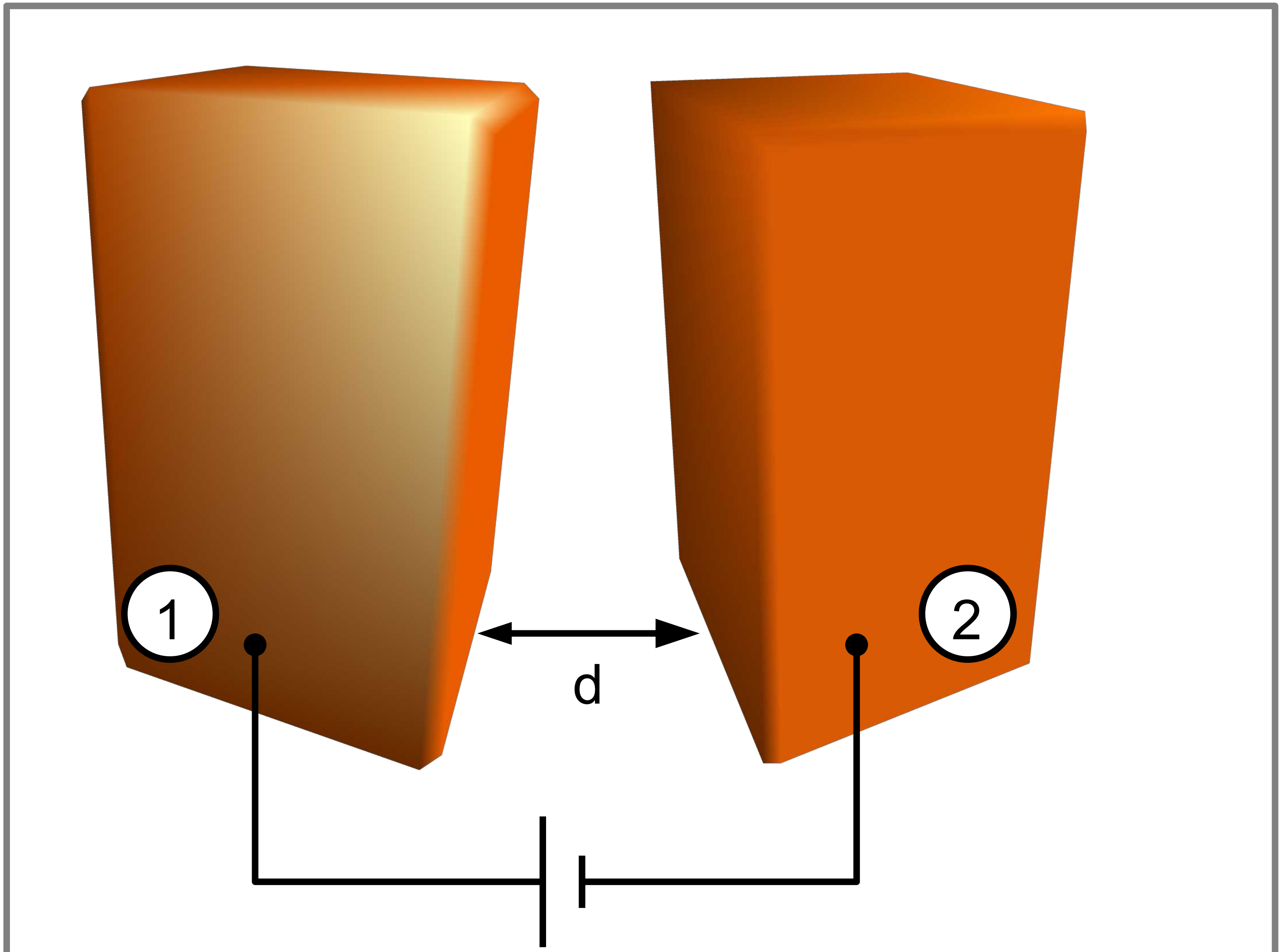
$$T \sim \exp\left(-2\int_a^b \frac{\sqrt{2m(U(x)-E)}}{\hbar}dx\right)$$



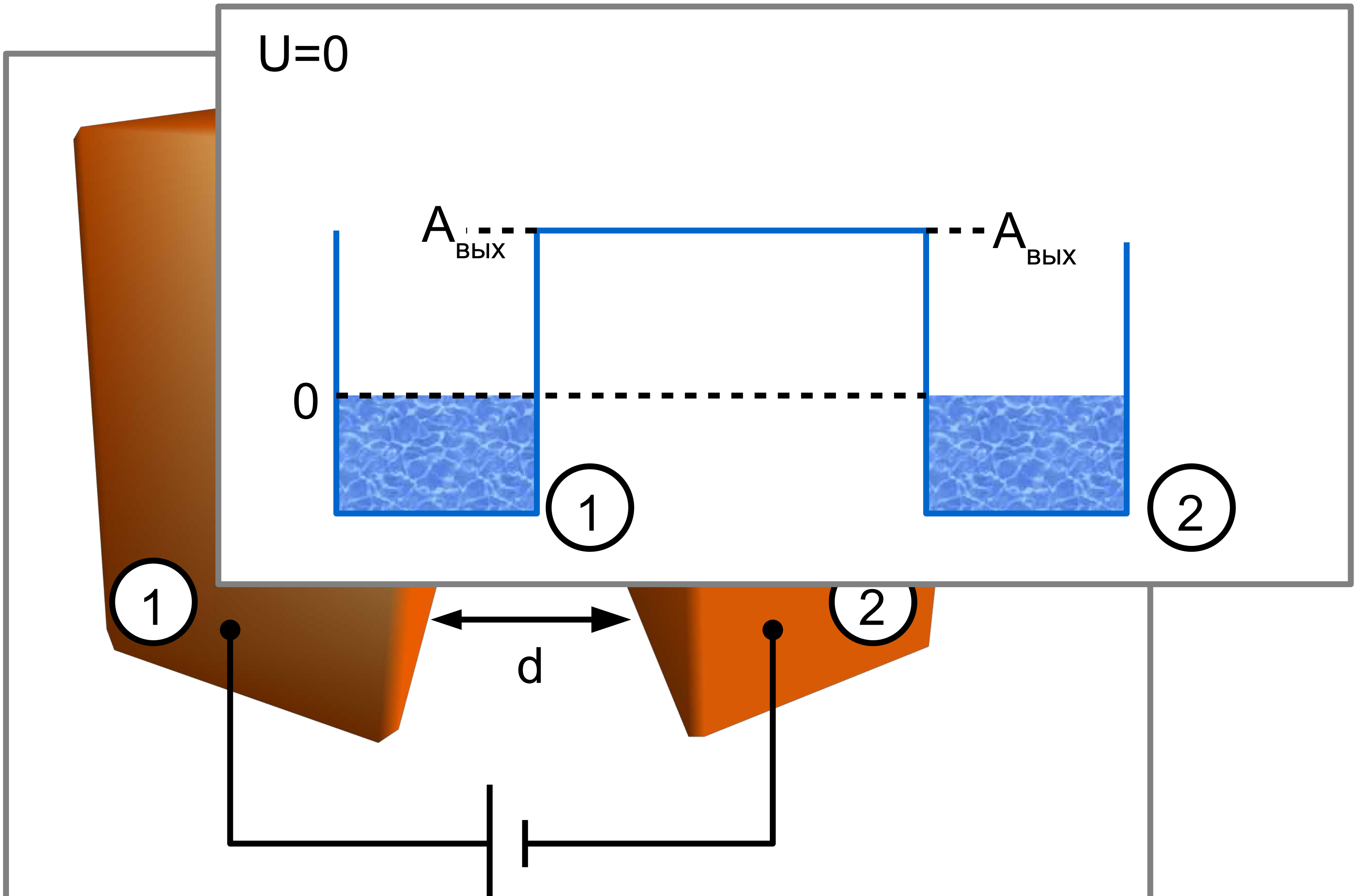
С понижением энергии альфа-частиц растет ширина запрещенной области и высота барьера — уменьшается вероятность прохождения и растет период полураспада

http://nuclphys.sinp.msu.ru/radioactivity/ract02.htm

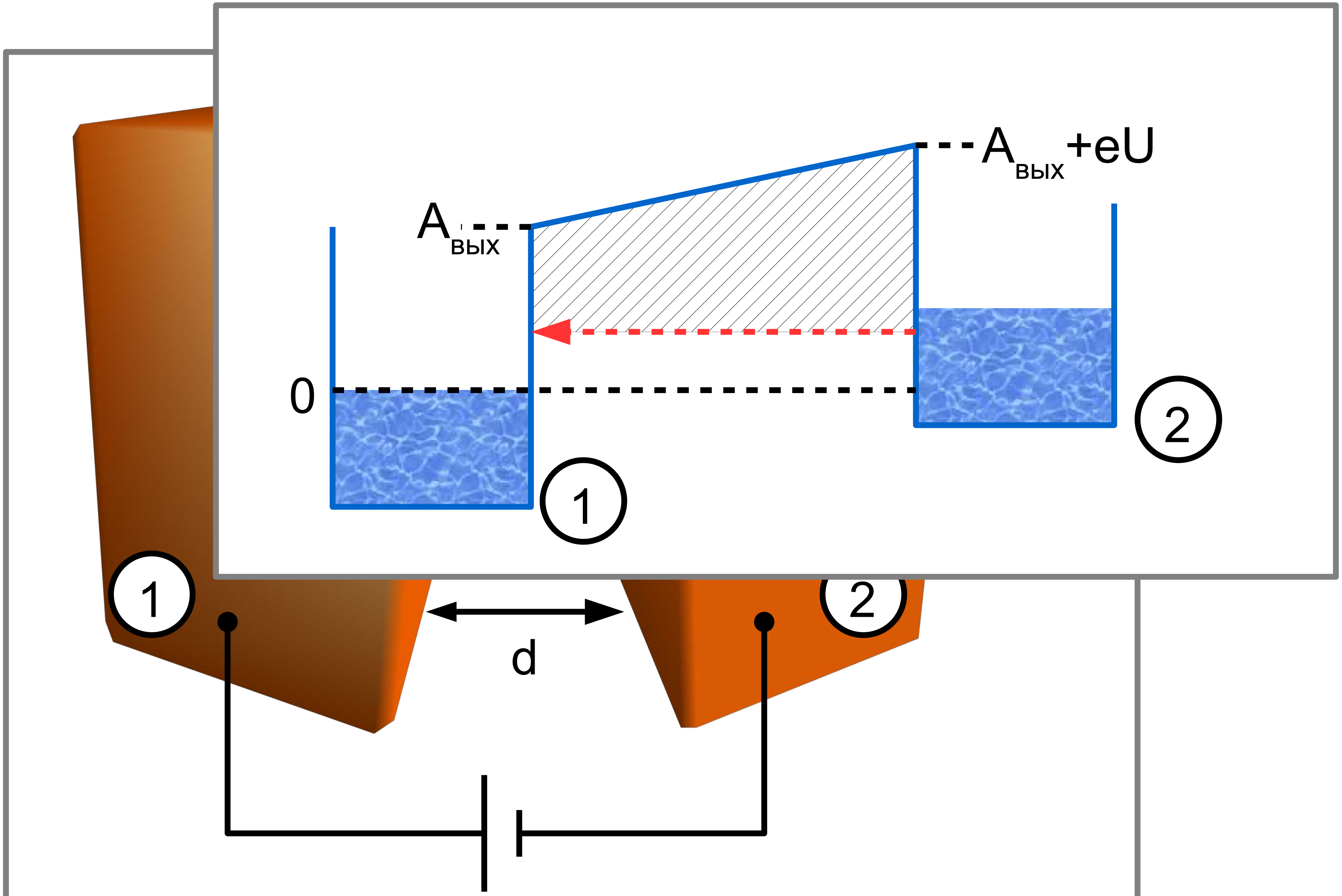
Туннелирование электронов между проводниками и туннельный микроскоп



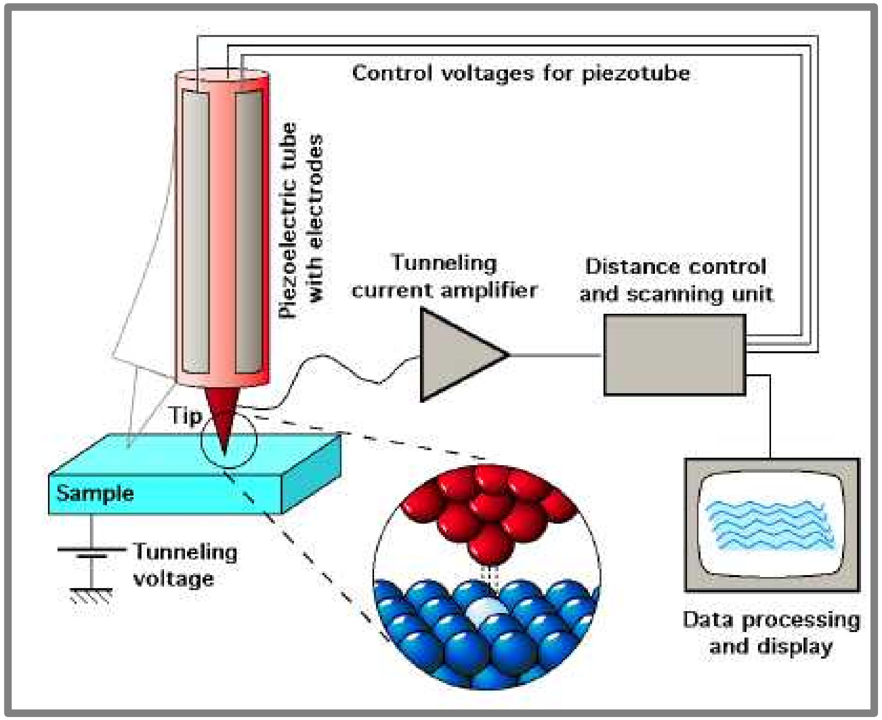
Туннелирование электронов между проводниками и туннельный микроскоп



Туннелирование электронов между проводниками и туннельный микроскоп

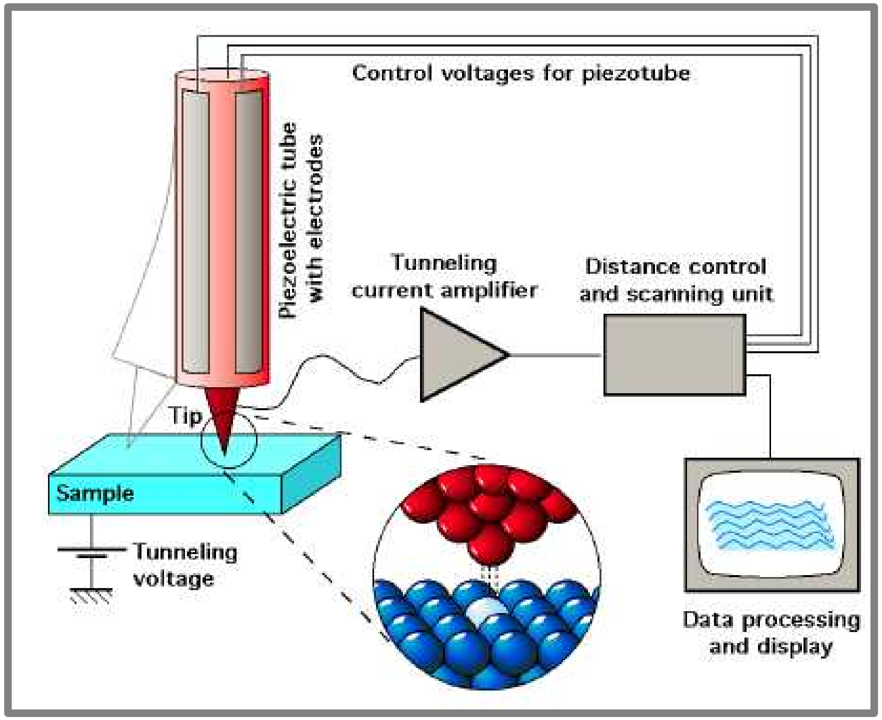


Туннельный микроскоп

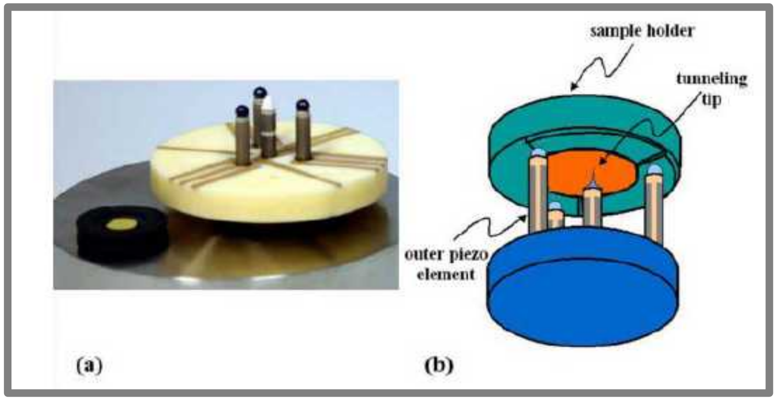


Википедия, Сканирующий туннельный микроскоп, http://en.wikipedia.org/wiki/Scanning_tunneling_microscope

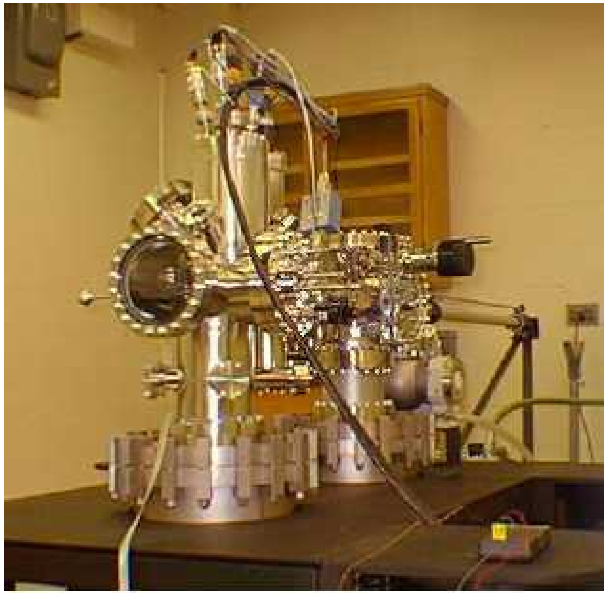
Туннельный микроскоп



Википедия, Сканирующий туннельный микроскоп, http://en.wikipedia.org/wiki/Scanning_tunneling_microscope

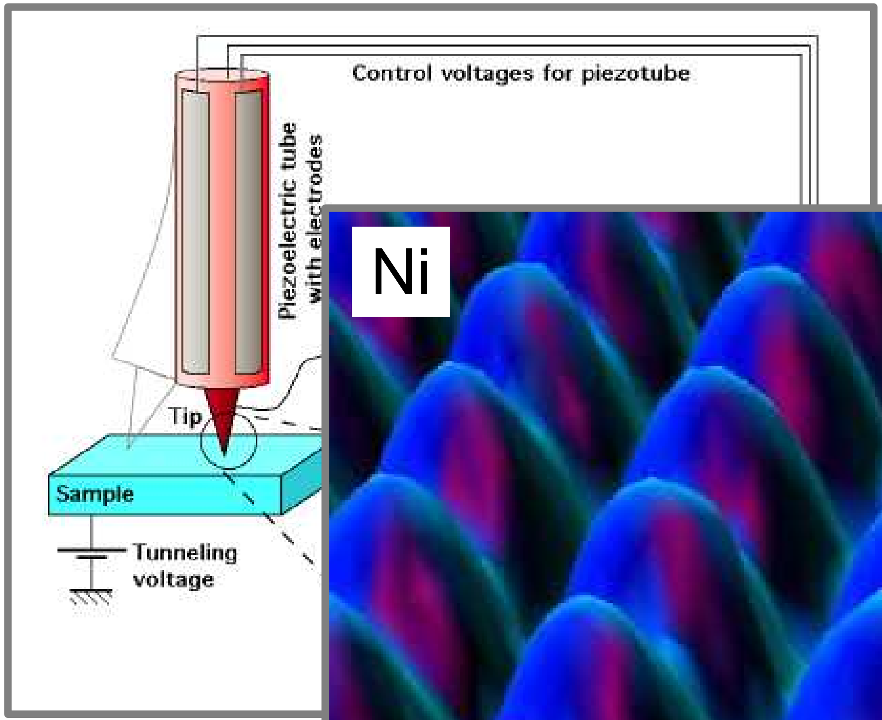


FZ Juelich, STM Group, Scanning Probe Microscopy, http://www.fz-juelich.de/ibn/Scanning_probe_microscopy

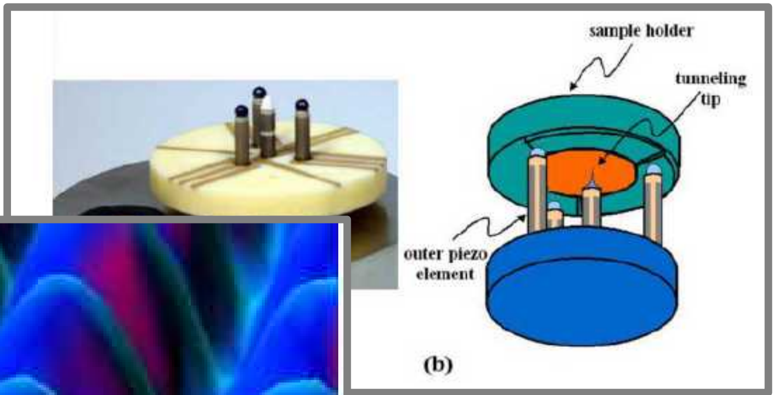


Wake Forest University, STM Group, http://www.wfu.edu/nanotech/Microscopy%20Facility/STMInstructions.html

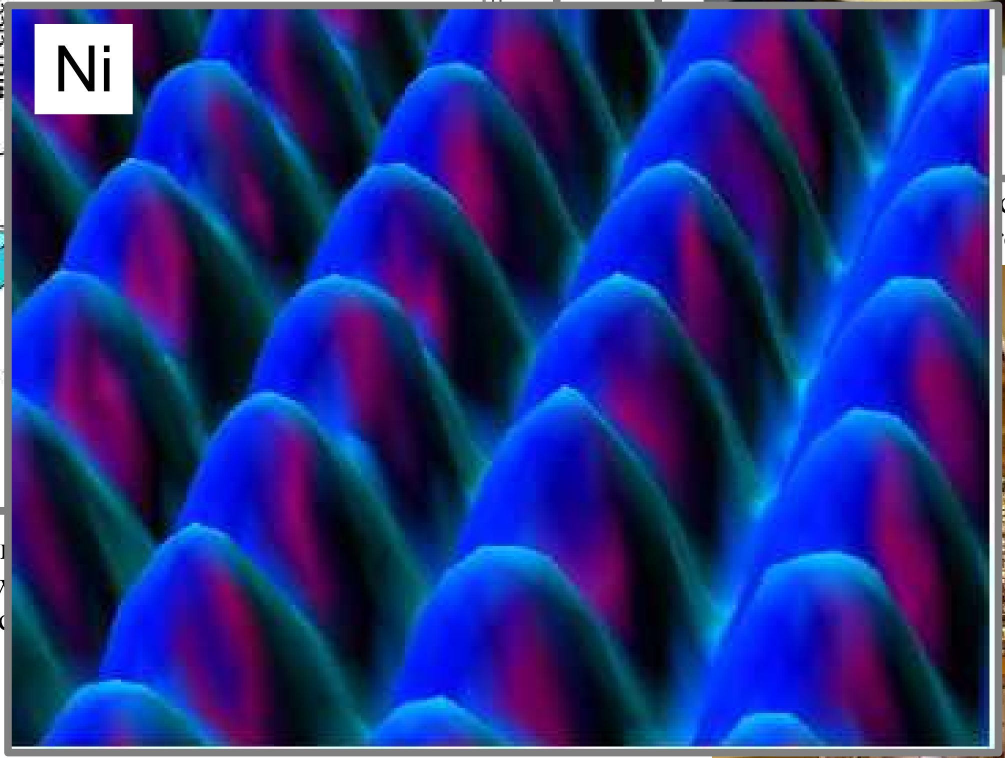
Туннельный микроскоп



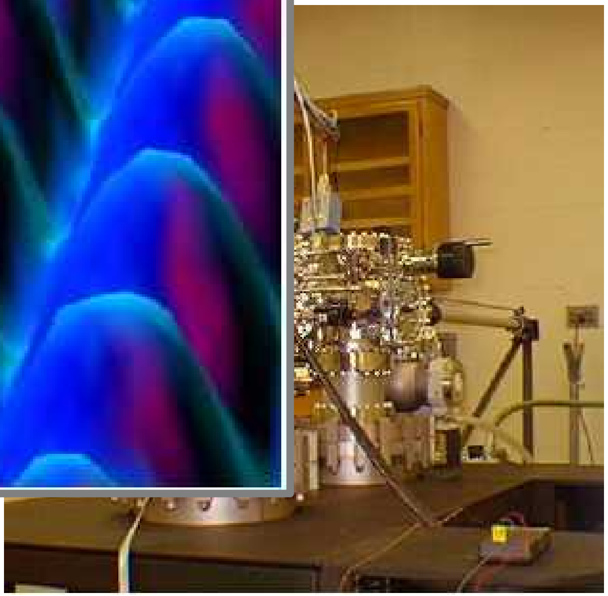
Википедия, Сканирую
http://en.wikipedia.org/v
Scanning_tunneling_mic



canning Probe Microscopy, http://www.fz-
obe_microscopy



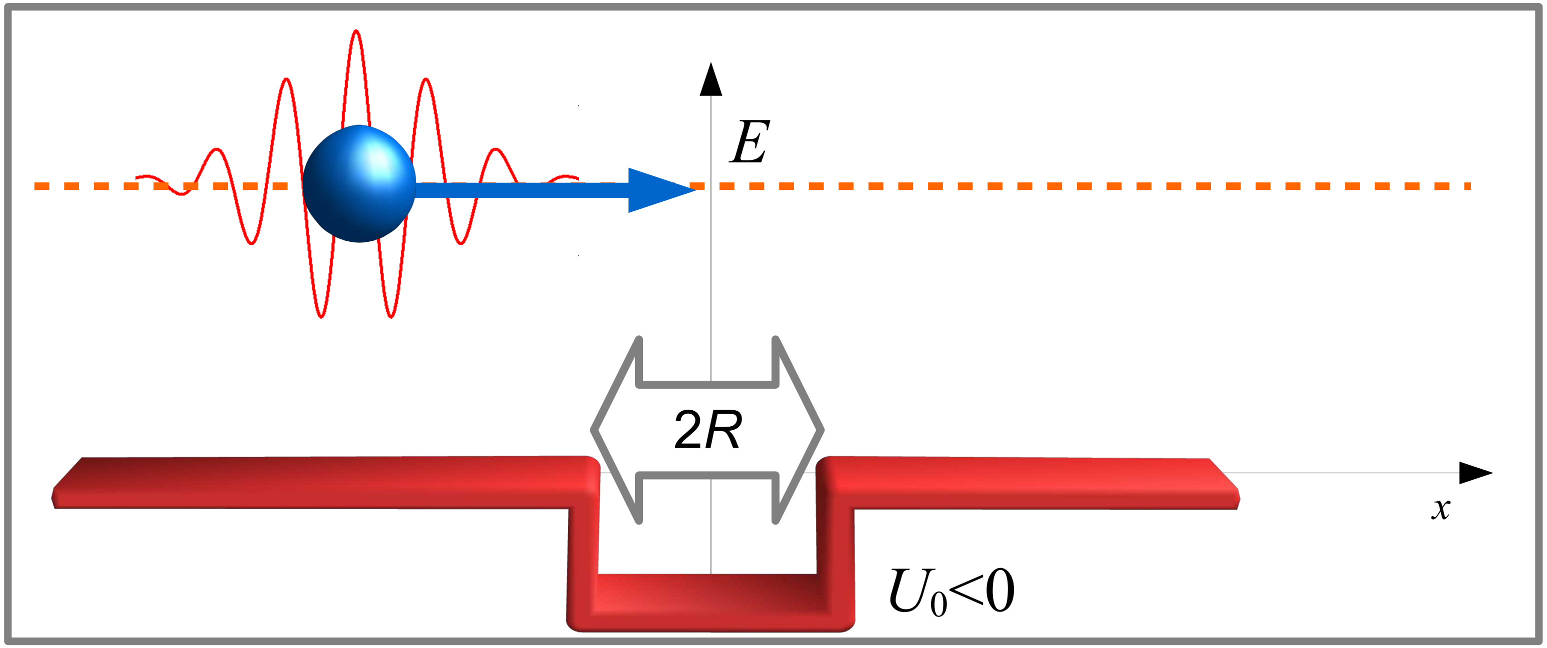
IBM Corp., STM Images Gallery,
http://www.almaden.ibm.com/vis/stm/gallery.html



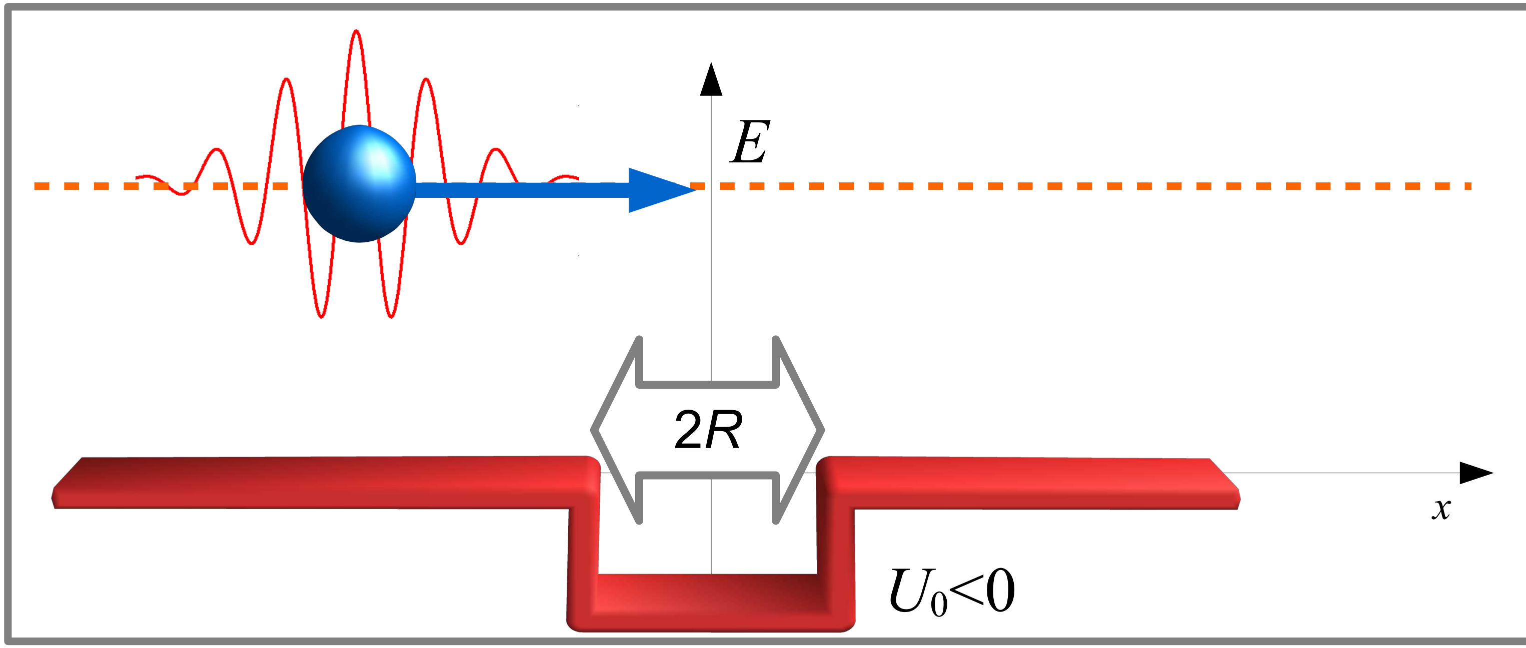
Wake Forest University, STM Group,
http://www.wfu.edu/nanotech/Microscopy%20Facility/STMInstructions.html

Часть 3. Потенциальные ямы

Задача 1. Прохождение над ямой (эффект Рамзауэра)

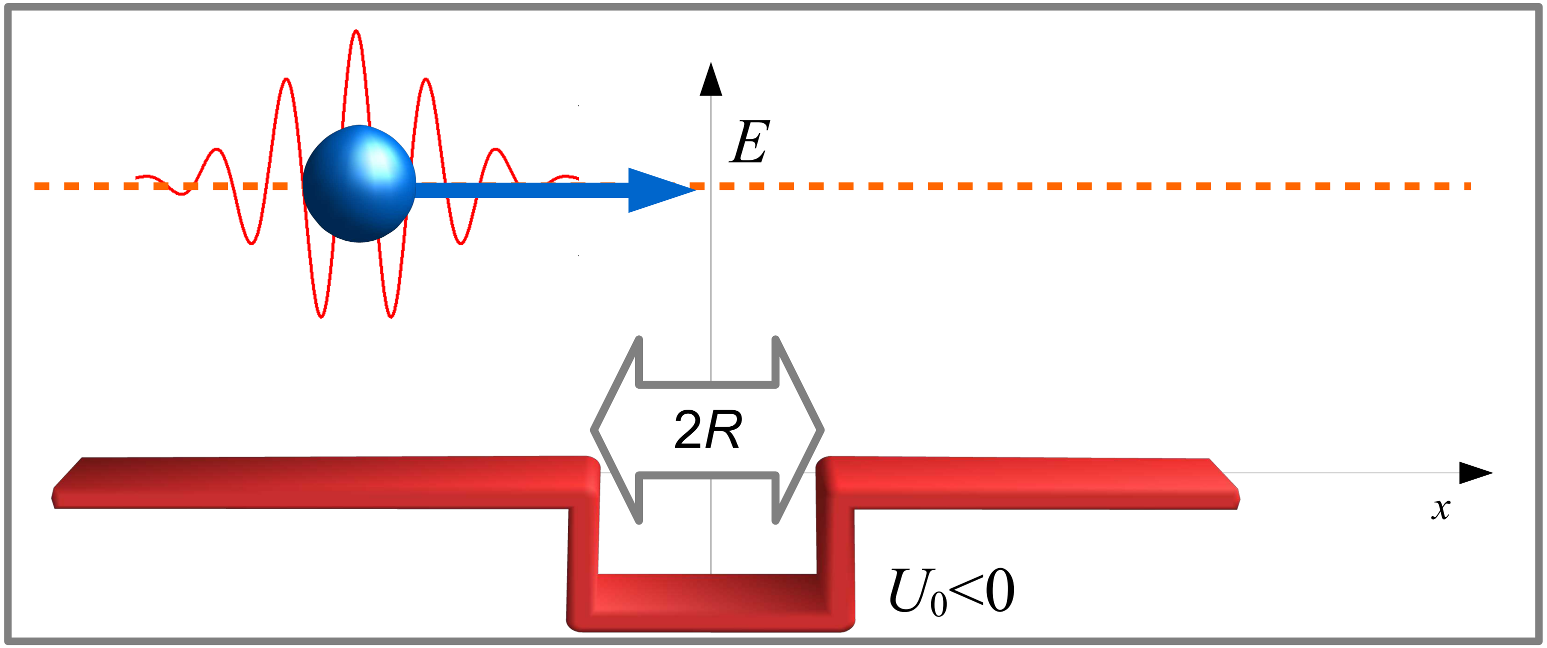


Задача 1. Прохождение над ямой (эффект Рамзауэра)



$$T=\frac{1}{1+\dfrac{U_0^2}{4E\left(E-U_0\right)}\sin^2\left(k'\times 2R\right)}$$

Задача 1. Прохождение над ямой (эффект Рамзауэра)



$$T = \frac{1}{1 + \dfrac{U_0^2}{4E\left(E - U_0\right)} \sin^2\left(k' \times 2R\right)}$$

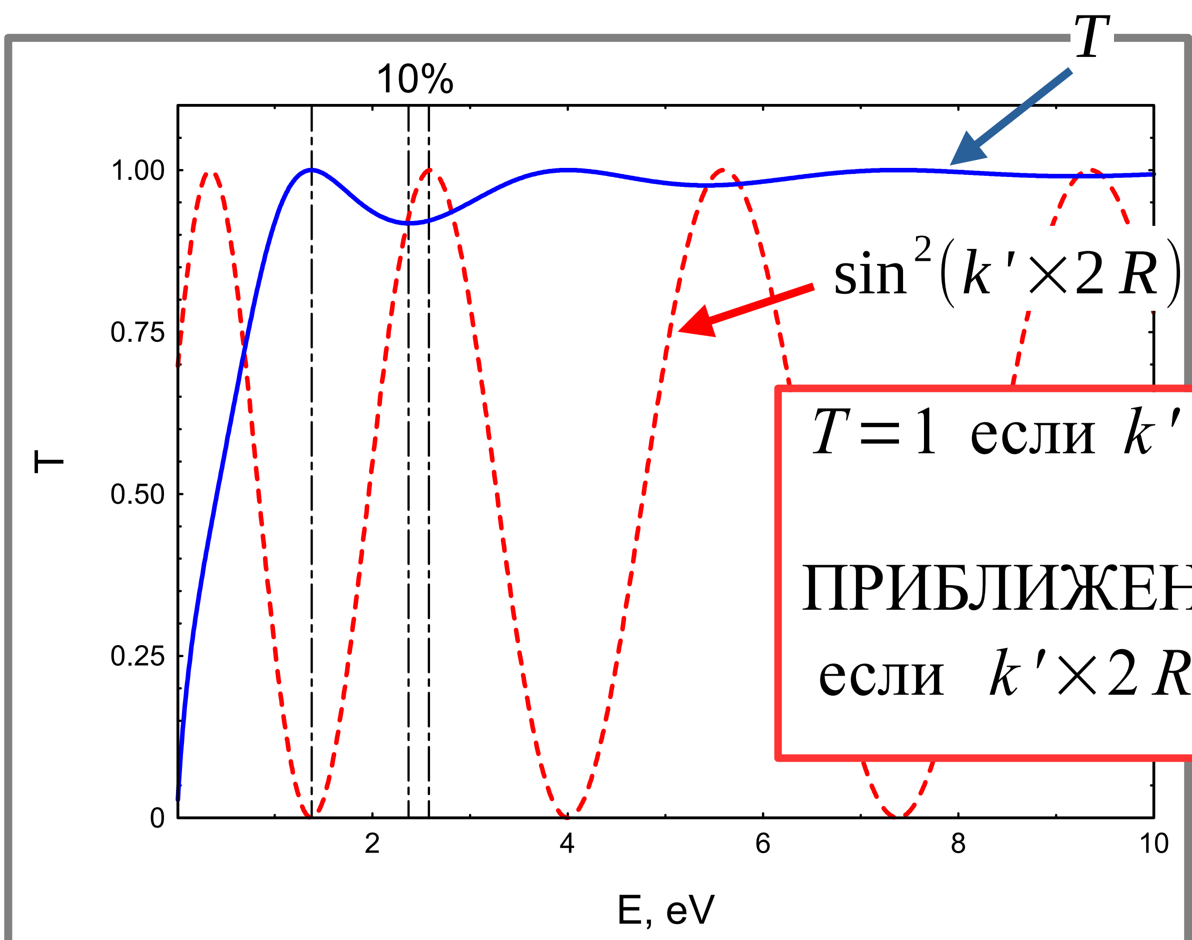
$$T = 1 \text{ если } k' \times 2R = \pi n$$
$$\min T \text{ если } k' \times 2R = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

Небольшое математическое уточнение...

$$T(E)=\frac{1}{1+\dfrac{U_0^2}{4E\left(E+|U_0|\right)}\sin^2\left(\dfrac{\sqrt{2m\left(E+|U_0|\right)}}{\hbar}\times 2R\right)}$$

$2R=5\,\text{Å}$

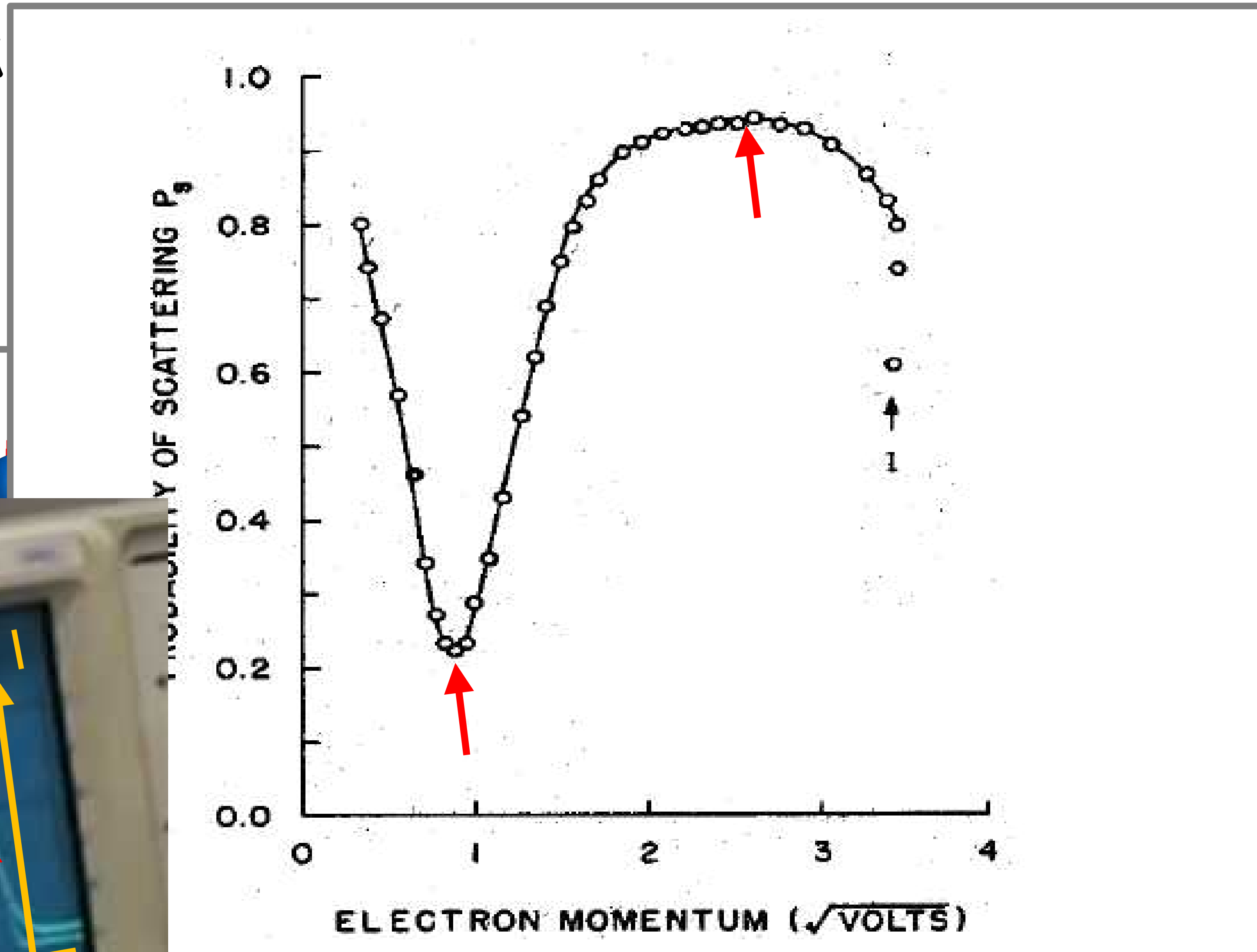
$|U_0|=2$ эВ



$T=1$ если $k'\times 2R=\pi n$

ПРИБЛИЖЕННО $min\,T$ если $k'\times 2R=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$

Задача

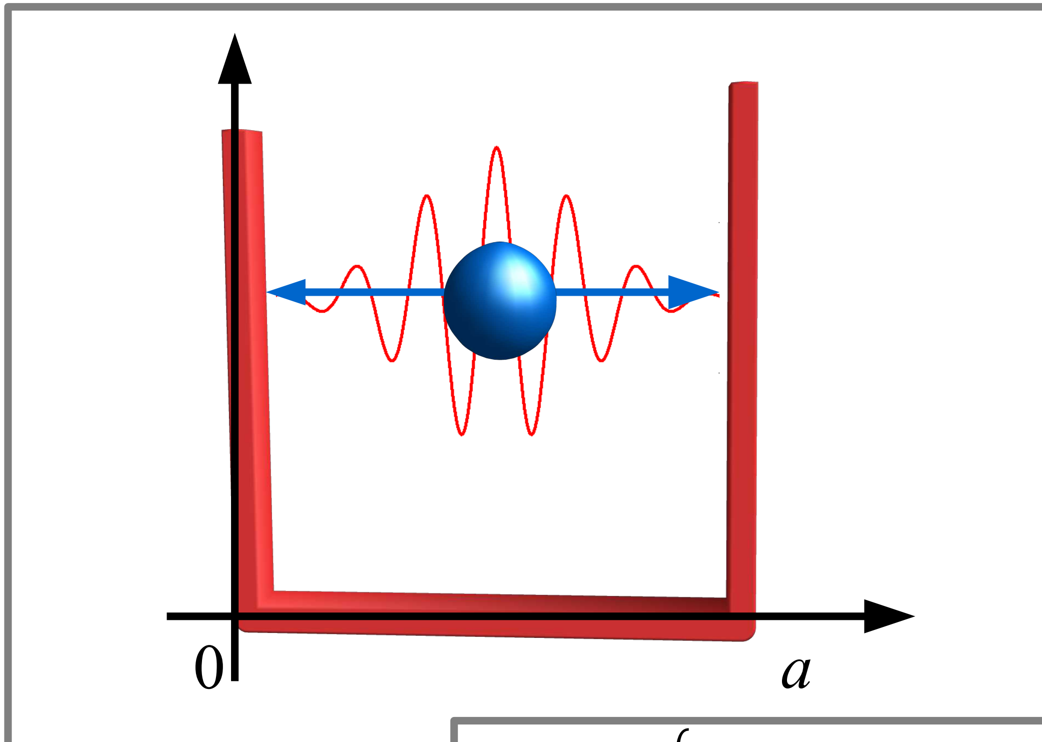


S.Kukolich, Am.J.Phys **36**, 701 (1968)

$$\ldots \sin^2(k'\times 2R)$$

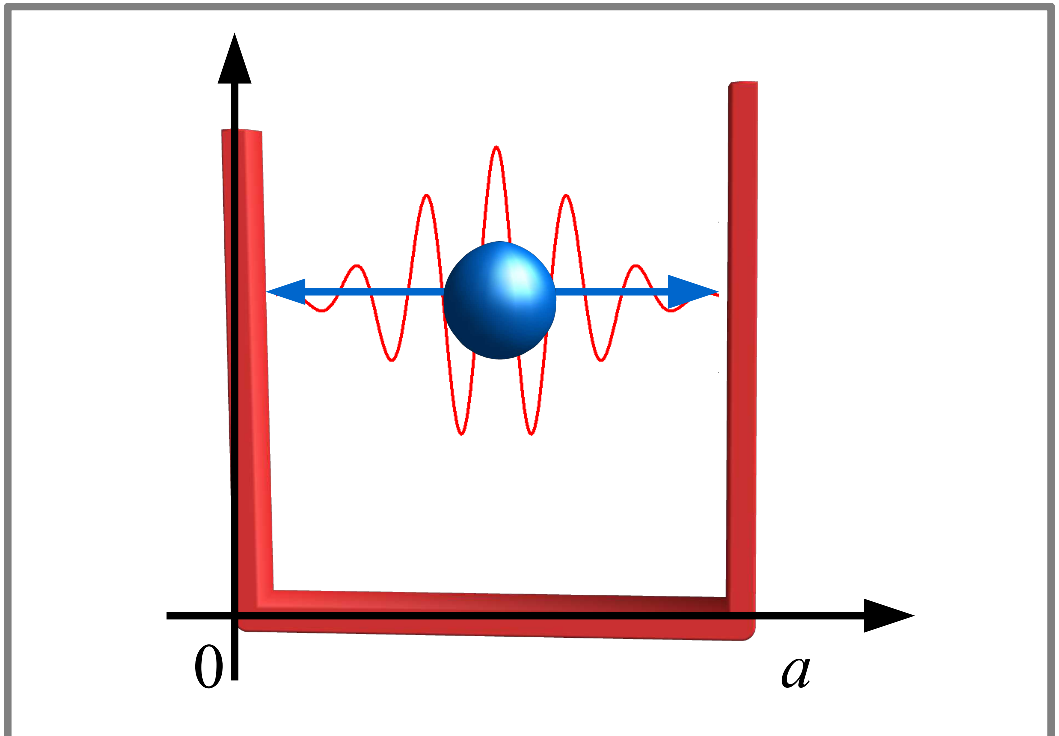
$$T=1 \text{ если } k'\times 2R=\pi n$$
$$\min T \text{ если } k'\times 2R=\frac{\pi}{2}+\pi n$$

Задача 2: Одномерная яма с бесконечными стенками



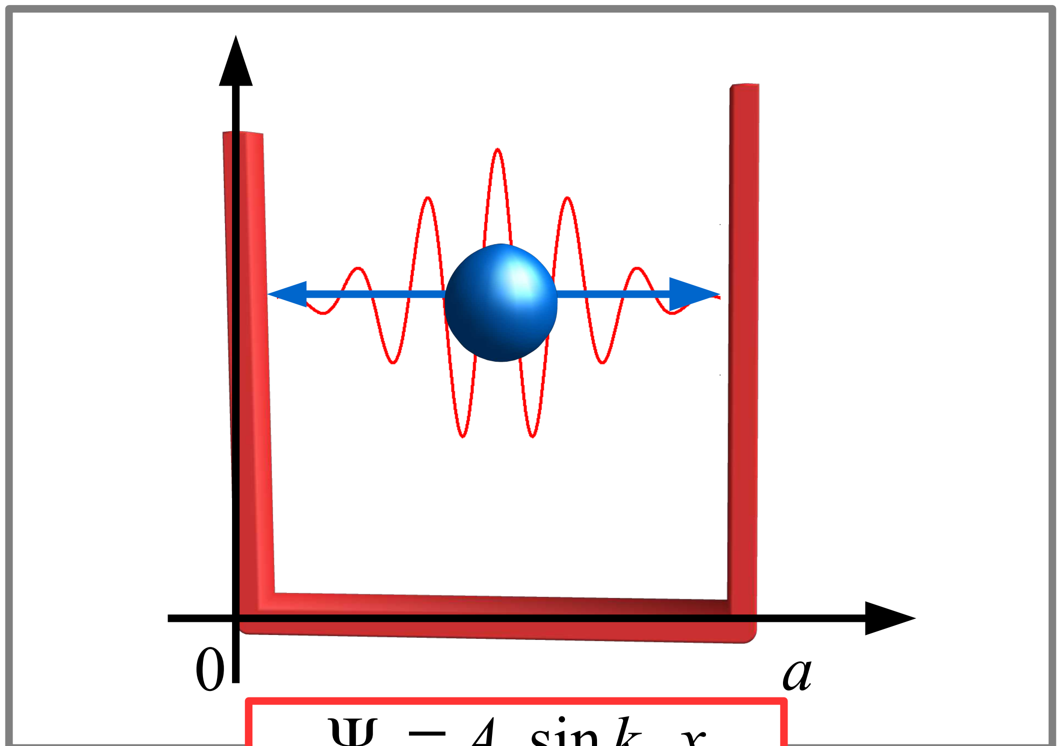
$$U(x)=\begin{cases} 0, & 0<x<a \\ \infty, & x<0 \text{ или } x>a \end{cases}$$

Задача 2: Одномерная яма с бесконечными стенками



$$\Psi = A e^{ikx} + B e^{-ikx} =$$
$$= A' \sin(kx) + B' \cos(kx)$$

Задача 2: Одномерная яма с бесконечными стенками

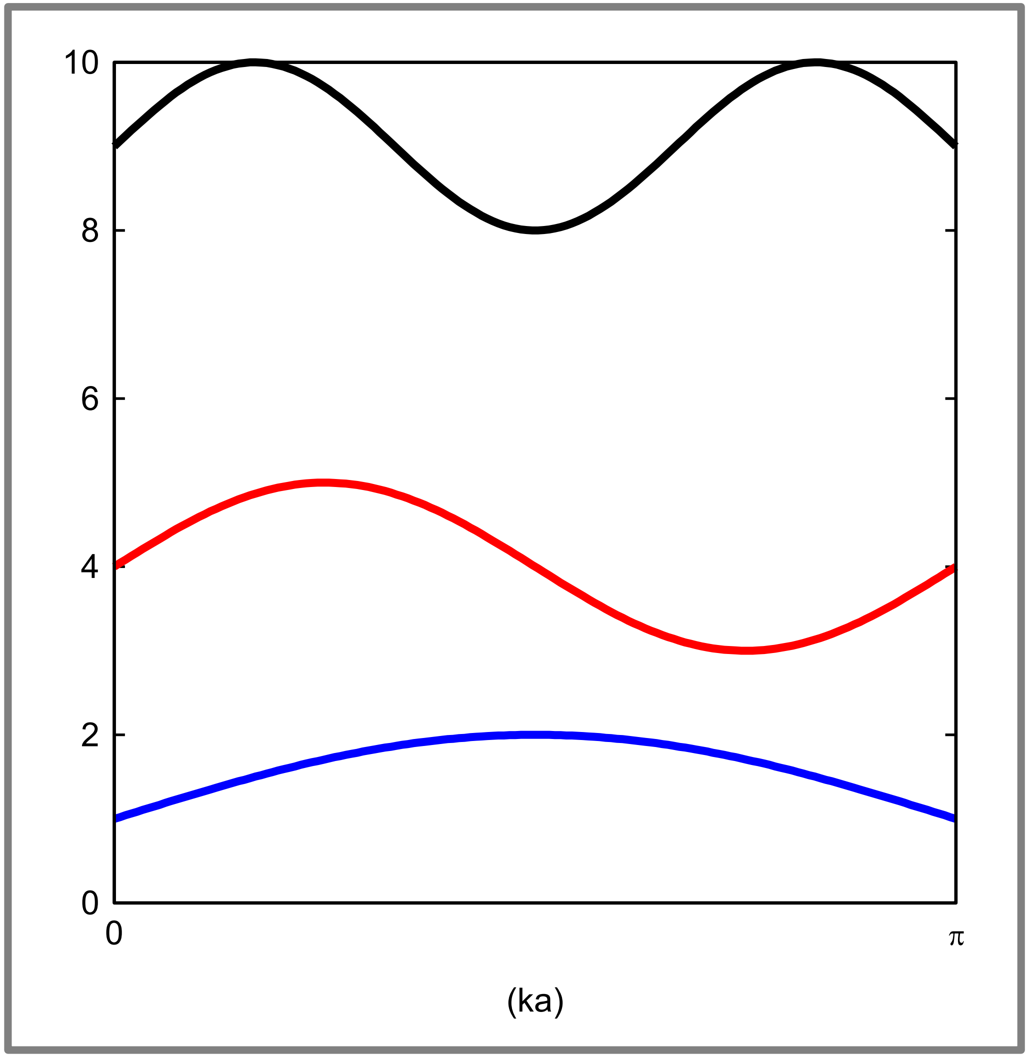


$$\Psi_n = A_n \sin k_n x$$

$$a k_n = \pi n$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2 m a^2}$$

Общие свойства волновой функции в потенциальной яме

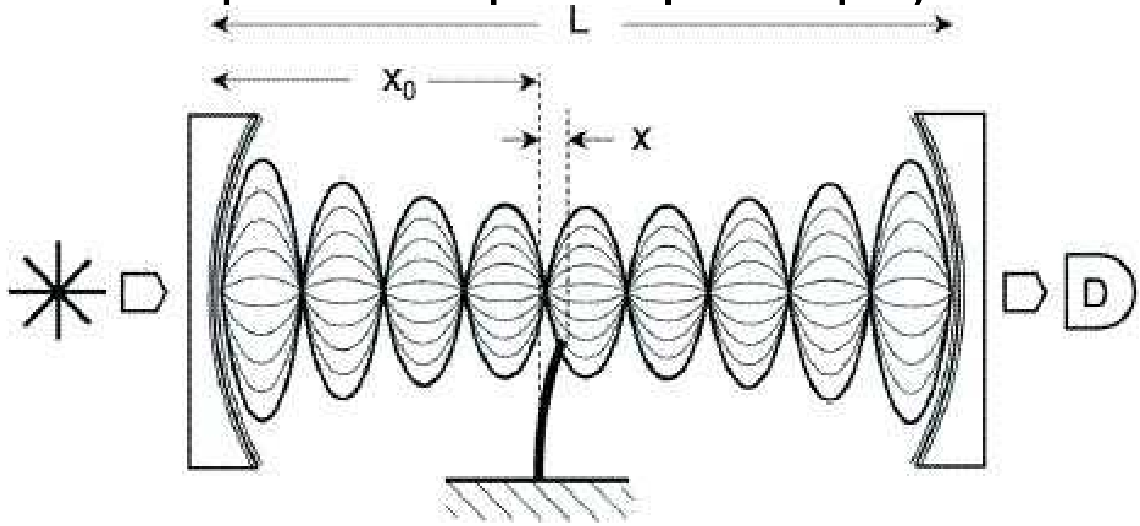


- В связанном состоянии имеются дискретные уровни энергии, маркируемые набором квантовых чисел
- в 1D число нулей волновой функции растет с ростом энергии

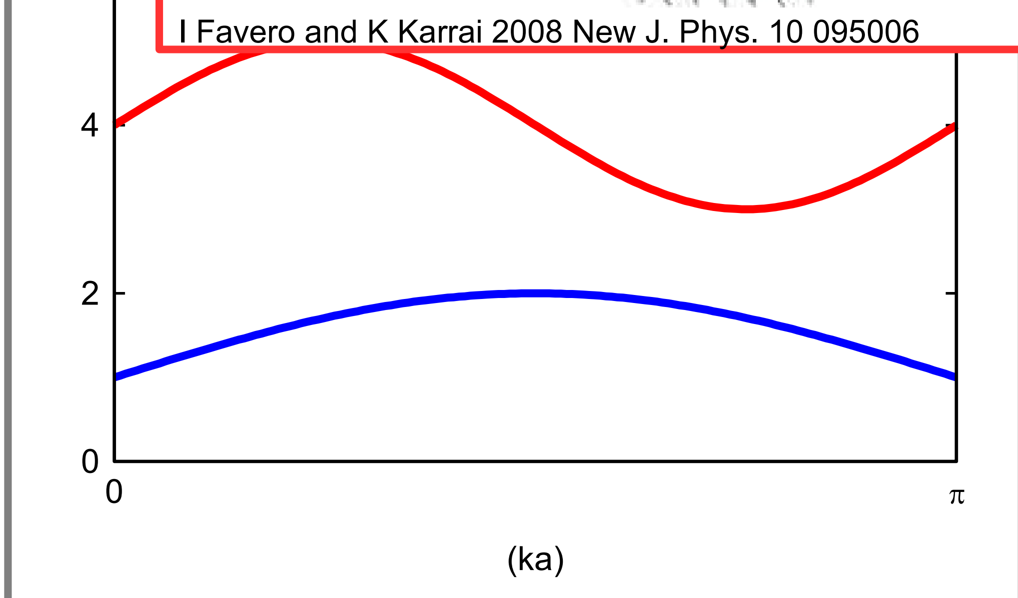
О… функции в …е

Оптическая аналогия:

стоячие волны в резонаторах (для 1D — резонатор Фабри-Перо)



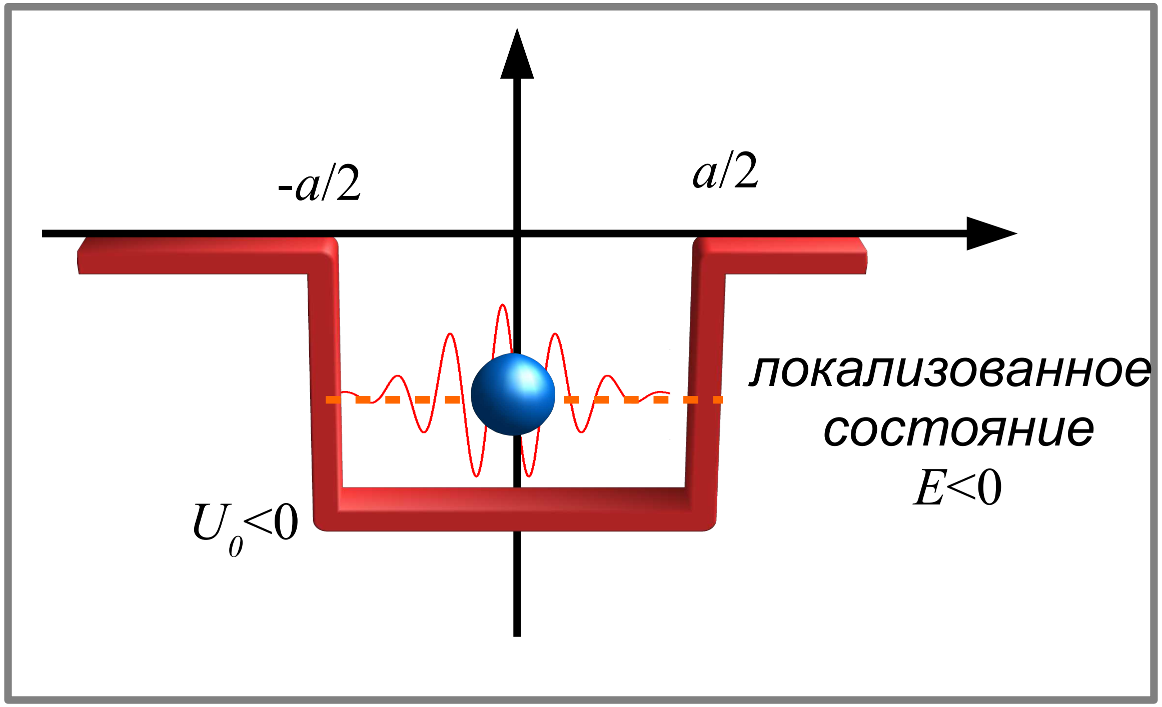
I Favero and K Karrai 2008 New J. Phys. 10 095006



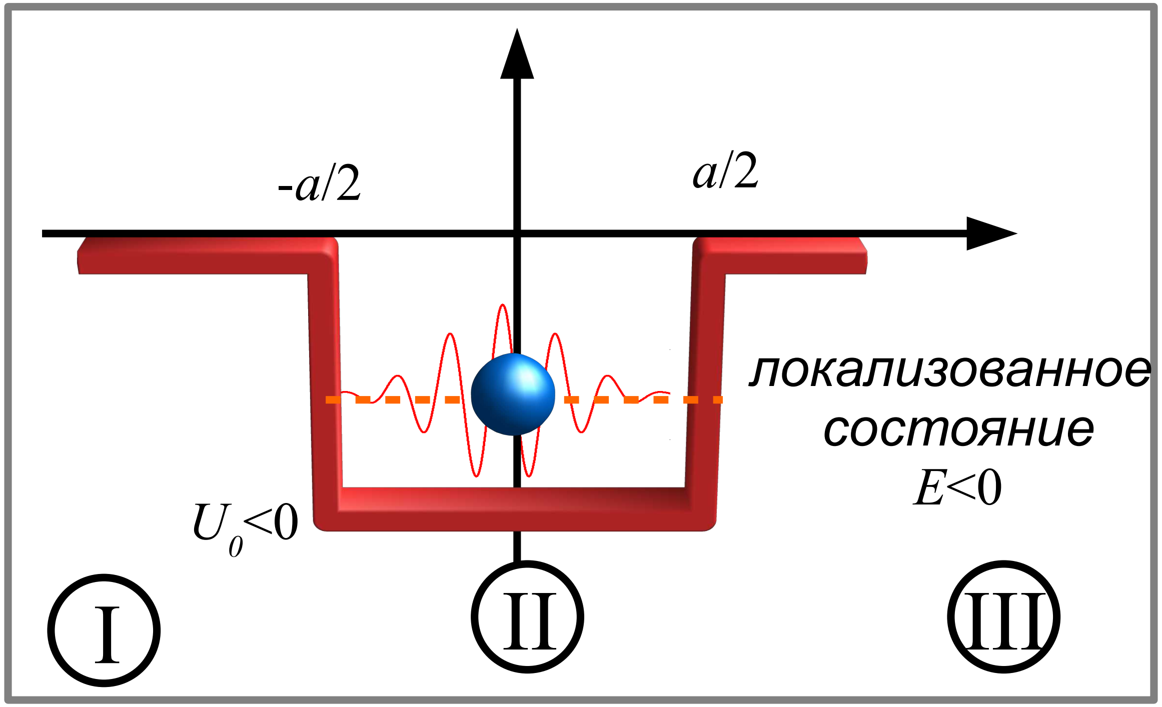
…анном состоянии …ся дискретные …и энергии, …руемые набором …вых чисел

- в 1D число нулей волновой функции растет с ростом энергии

Задача 3: Симметричная одномерная яма конечной глубины

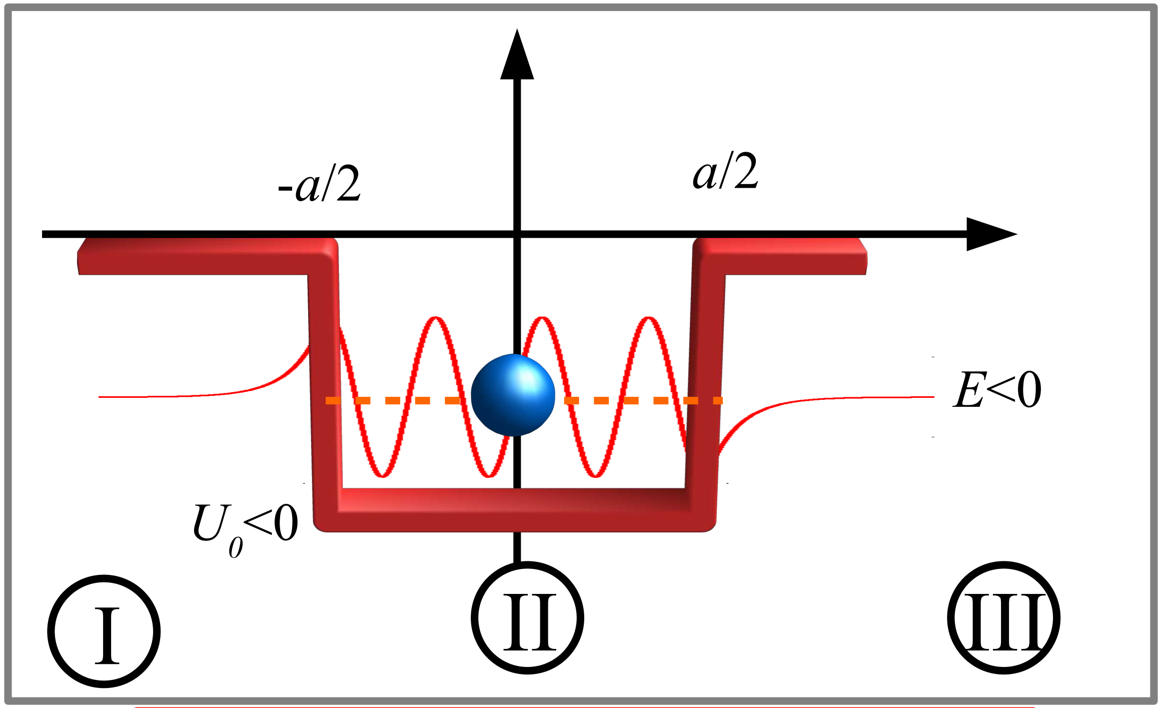


Задача 3: Симметричная одномерная яма конечной глубины



$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi+\left(E-U\left(x\right)\right)\Psi=0$$

Задача 3: Симметричная одномерная яма конечной глубины



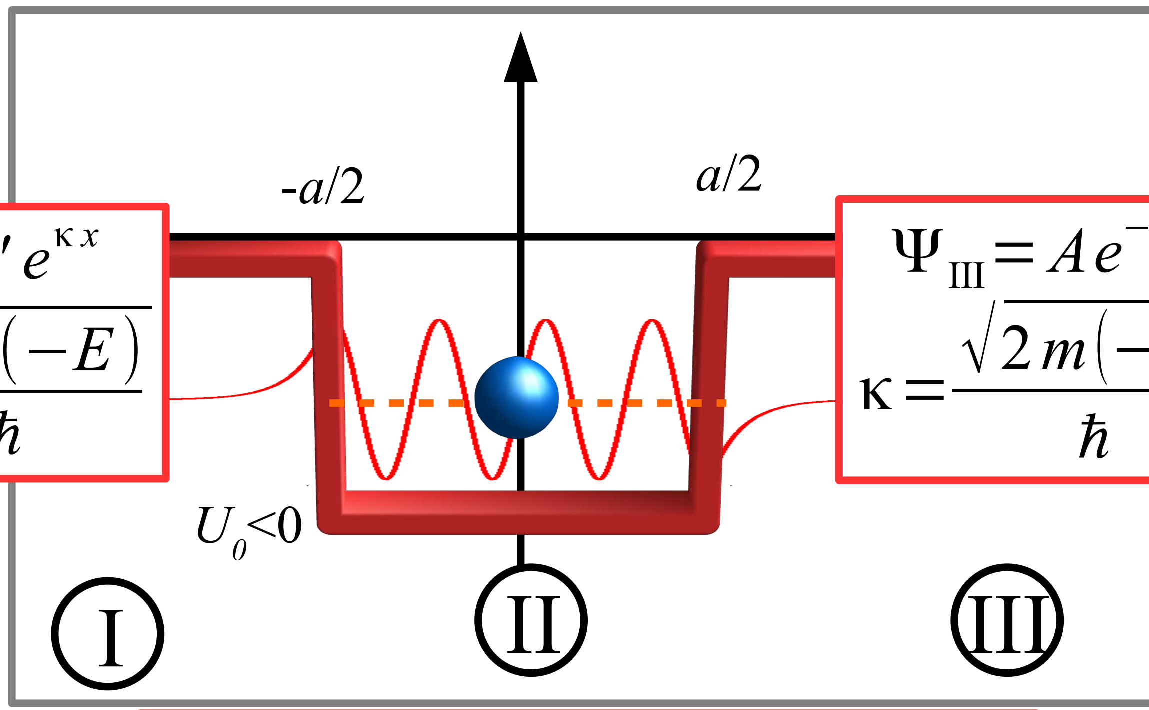
$$\Psi_{II} = B_1 \sin(k\,x) \text{ или } B_2 \cos(k\,x)$$

$$k = \frac{\sqrt{2\,m(E - U_0)}}{\hbar}$$

Задача 3: Симметричная одномерная яма конечной глубины

$$\Psi_{\mathrm{I}} = A' e^{\kappa x}$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(-E)}}{\hbar}$$



$$\Psi_{\mathrm{III}} = A e^{-\kappa x}$$

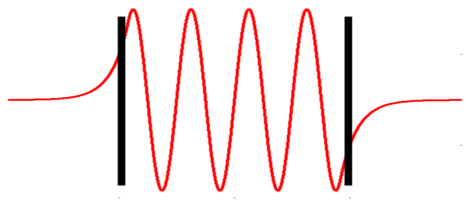
$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(-E)}}{\hbar}$$

$$\Psi_{\mathrm{II}} = B_1 \sin(k x) \text{ или } B_2 \cos(k x)$$

$$k = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar}$$

«Сшивка» решений

решения типа SIN



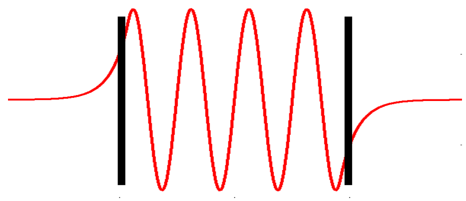
$$\begin{cases} \sin(k\,a/2) = A\,e^{-\kappa a/2} \\ k\cos(k\,a/2) = -\kappa\,A\,e^{-\kappa a/2} \end{cases}$$

$$tg\,\frac{k\,a}{2} = -\frac{k}{\kappa}$$

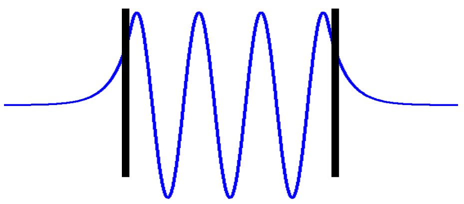
$$k^2 + \kappa^2 = \frac{2\,m\,|U_0|}{\hbar^2} \rightarrow \kappa = \sqrt{\frac{2\,m\,|U_0|}{\hbar^2} - k^2}$$

«Сшивка» решений

решения типа SIN



решения типа COS



$$\begin{cases} \sin(k\,a/2) = A\,e^{-\kappa a/2} \\ k\cos(k\,a/2) = -\kappa\,A\,e^{-\kappa a/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(k\,a/2) = A\,e^{-\kappa a/2} \\ -k\sin(k\,a/2) = -\kappa\,A\,e^{-\kappa a/2} \end{cases}$$

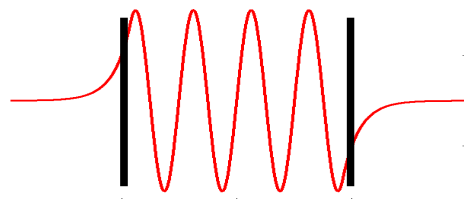
$$tg\,\frac{k\,a}{2} = -\frac{k}{\kappa}$$

$$tg\,\frac{k\,a}{2} = \frac{\kappa}{k}$$

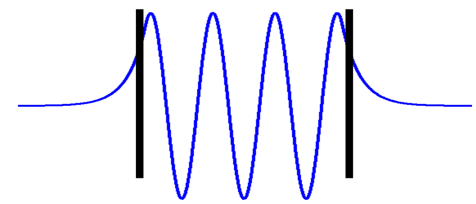
$$k^2 + \kappa^2 = \frac{2m|U_0|}{\hbar^2} \rightarrow \kappa = \sqrt{\frac{2m|U_0|}{\hbar^2} - k^2}$$

«Сшивка» решений

решения типа SIN



решения типа COS



$$\mathrm{tg}\,\frac{k\,a}{2}=-\frac{k}{\kappa}$$

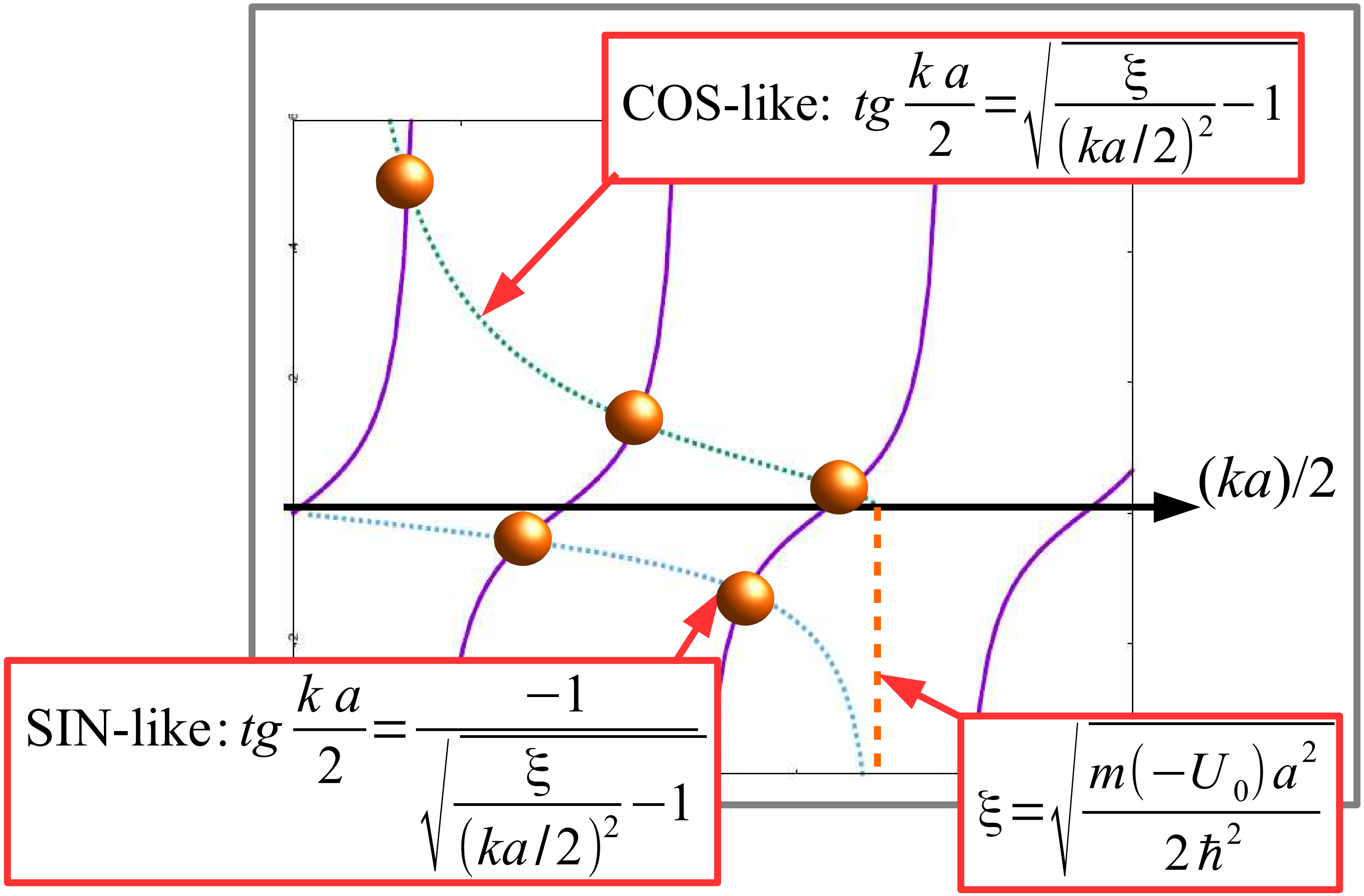
$$\mathrm{tg}\,\frac{k\,a}{2}=\frac{\kappa}{k}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{k\,a}{2}=\frac{-k}{\sqrt{\dfrac{2m|U_0|}{\hbar^2}-k^2}}=\frac{-1}{\sqrt{\dfrac{\xi}{(k\,a/2)^2}-1}}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{k\,a}{2}=\frac{\sqrt{\dfrac{2m|U_0|}{\hbar^2}-k^2}}{k}=\sqrt{\frac{\xi}{(k\,a/2)^2}-1}$$

$$\xi=\frac{m|U_0|a^2}{2\hbar^2}$$

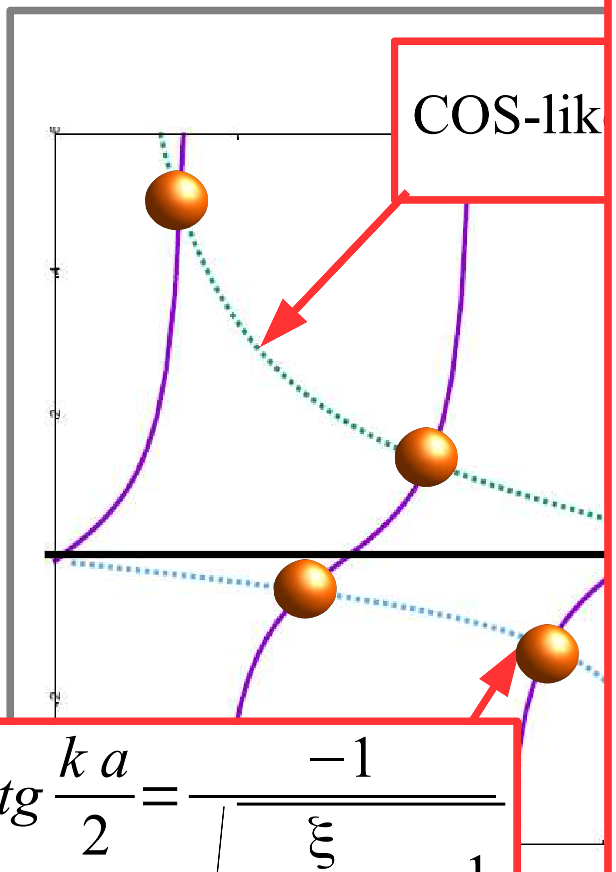
Уровни энергии для симметричной ямы



Уровни энергии для с

- В прямоугольной яме конечной глубины — конечное число связанных состояний
- В одномерном случае связанное состояние есть всегда
- В достаточно мелкой яме — единственное связанное состояние при

$$\sqrt{\frac{m(-U_0)a^2}{2\hbar^2}} < \frac{\pi}{2}$$

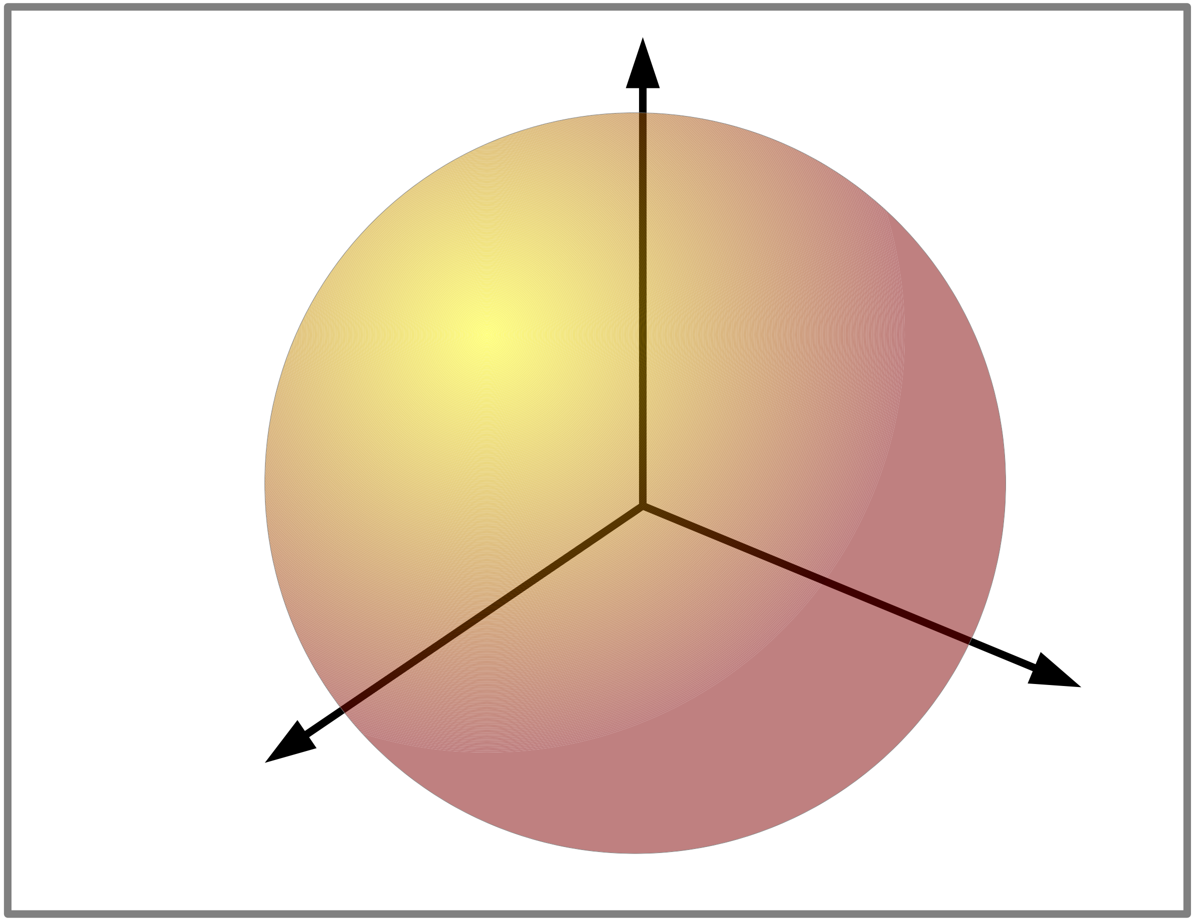


$$\text{SIN-like}: tg\frac{k\,a}{2} = \frac{-1}{\sqrt{\dfrac{\xi}{(ka/2)^2} - 1}}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\quad}{2\hbar^2}}$$

Бонус: Сферическая прямоугольная потенциальная яма

$$U(r) = \begin{cases} U_{0,} r < R \left(U_0 < 0 \right) \\ 0, r > R \end{cases}$$

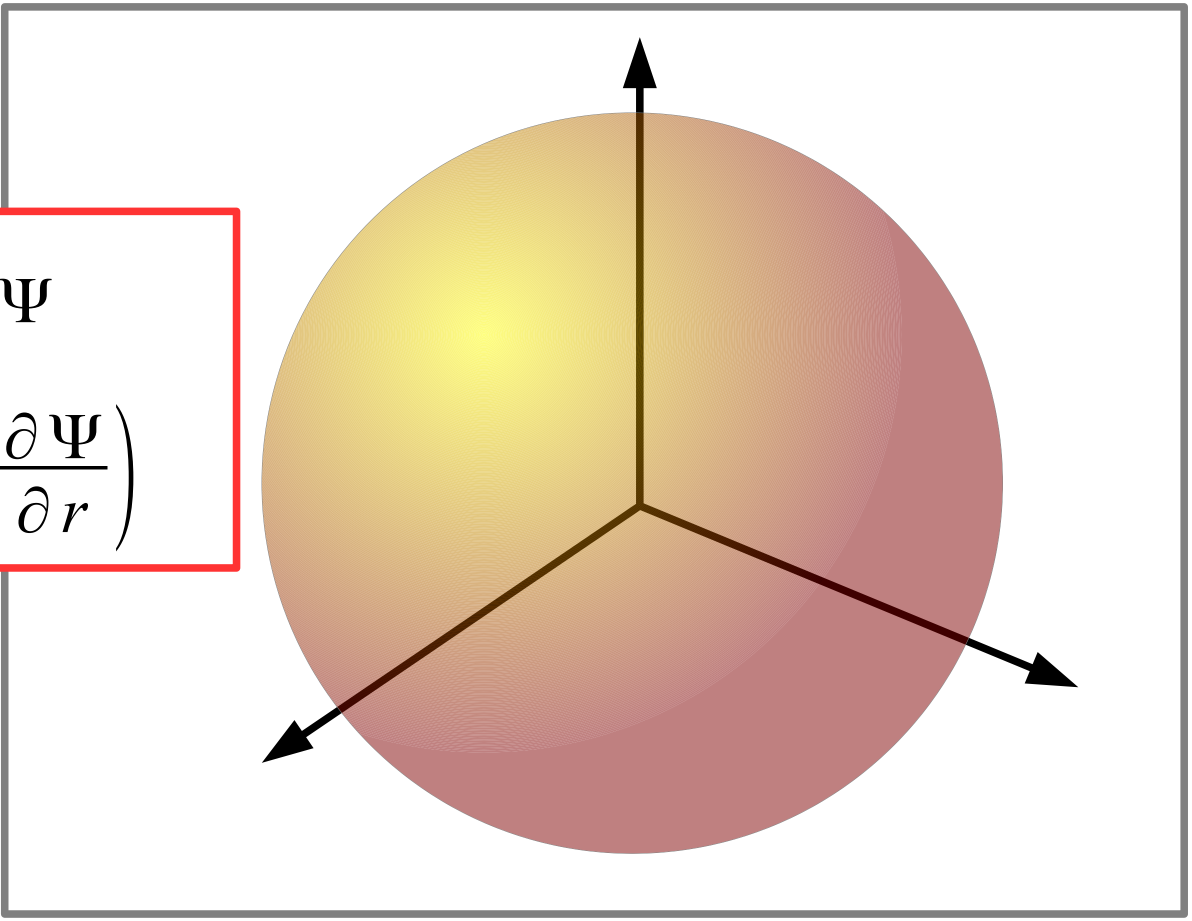


Бонус: Сферическая прямоугольная потенциальная яма

$$U(r) = \begin{cases} U_0, r < R \,(U_0 < 0) \\ 0, r > R \end{cases}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(r)\Psi = E\Psi$$

$$\Delta\Psi(\text{только r!}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)$$



Бонус: Сферическая прямоугольная потенциальная яма

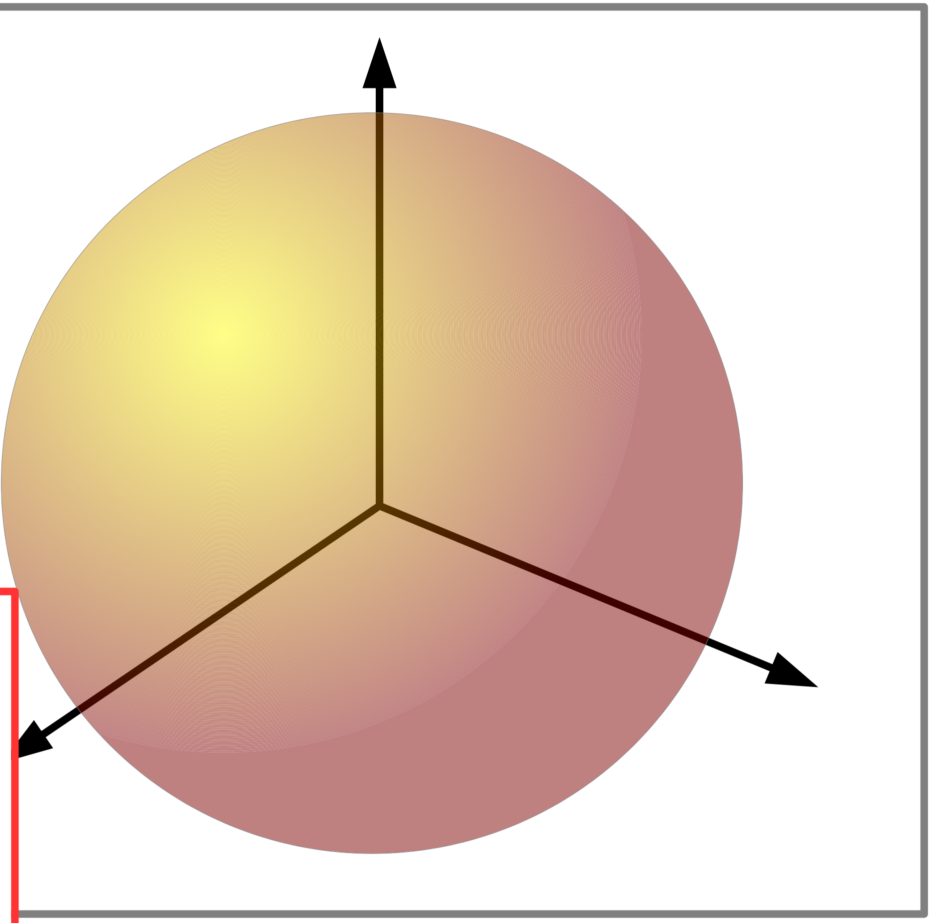
$$U(r) = \begin{cases} U_0, r < R \, (U_0 < 0) \\ 0, r > R \end{cases}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(r)\Psi = E\Psi$$

$$\Delta\Psi(\text{только r!}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)$$

$$\Psi = f/r: \quad -\frac{\hbar^2}{2m} f'' + U_f(r) f = E f$$

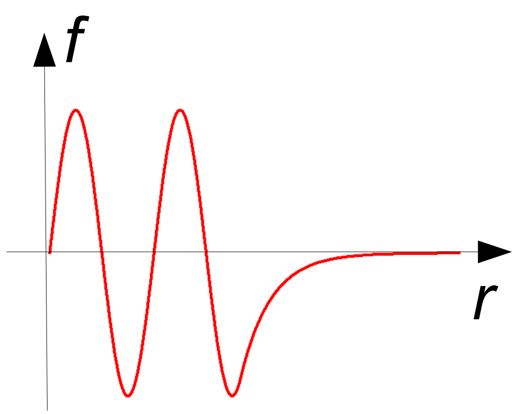
$$U_f(r) = \begin{cases} \infty, r < 0 \\ U_0, r < R \\ 0, r > R \end{cases}$$

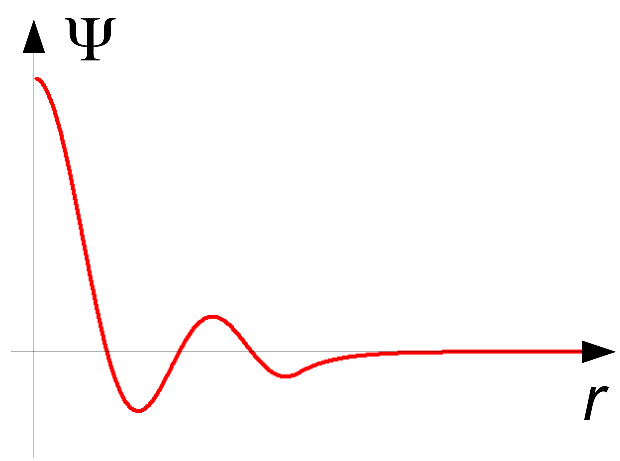


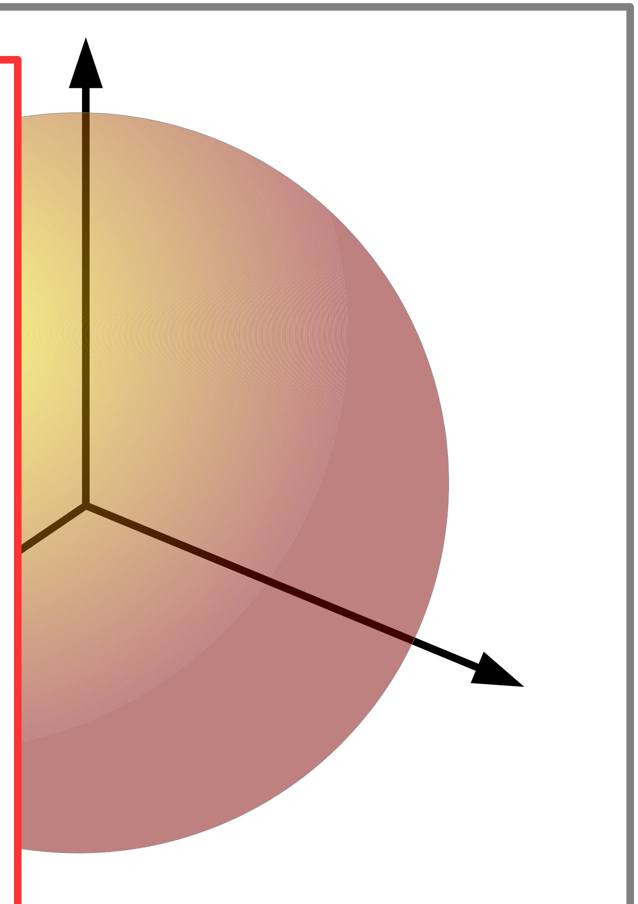
Бонус: Сферическая прямоугольная потенциальная яма

- Сферически симметричные решения в такой яме — все «типа SIN».
- Решения возникают только если

$$\sqrt{\frac{m(-U_0)a^2}{2\hbar^2}} > \frac{\pi}{2}$$







Главное на лекции