

Неделя 6. Объёмные полупроводники.

Здесь приводятся решения задач для разбора на семинаре для лекционного потока ФОПФ, 6 семестр, 2016-2017 уч.год. О замеченных опечатках, ошибках и неточностях просьба сообщать В.Н.Глазкову vglazkov@yandex.ru

Оглавление

Задача 4.2	2
Задача 4.40	3
Задача 4.25	4
Задача 4.21.....	6

Задача 4.2

Используя известные формулы для энергии связи электрона в атоме водорода и боровского радиуса r_B , получить аналогичные формулы для примесного центра большого радиуса в полупроводнике со статической диэлектрической проницаемостью ϵ и эффективной массой электрона m^* . Оценить эти величины для донорных центров в кристалле $InSb$, где $m^* = 0.013 m_e$ (m_e — масса свободного электрона), а $\epsilon = 16$.

Решение:

Из курса атомной физики энергия связи $Ry = \frac{m e^4}{2 \hbar^2}$, а радиус первой боровской орбиты $r_B = \frac{\hbar^2}{m e^2}$.

Строгое решение требует поиска состояний электрона с учётом его взаимодействия с «родительским» атомом и со всеми окружающими атомами. Мы пользуемся известным из опыта фактом, что существуют примеси с «мелкими» уровнями, электроны с которыми связаны слабо. В таком случае ожидается, что дебройлевская длина волны такого электрона будет большой по сравнению с межатомным расстоянием, а «траектория» электрона будет проходить в матрице полупроводника. Тогда можно пользоваться приближением непрерывной среды и учитывать наличие среды множителем диэлектрической проницаемости. В системе с отличной от единицы ϵ , все электростатические взаимодействия (которые пропорциональны e^2) будут в ϵ раз слабее, то есть надо все e^2 , входящие в ответ, заменить на $\frac{e^2}{\epsilon}$. Электрон, движущийся в матрице полупроводника за счёт взаимодействия с матрицей приобретает эффективную массу. Дополнительно нужно отметить, что длина экранирования при малой концентрации примеси и понижении температуры может быть сделана сколь угодно большой. Поэтому можно считать в области движения электрона потенциал кулоновским.

Для эффективной постоянной Ридберга имеем:

$$Ry^* = \frac{m^* e^4}{\epsilon^2 2 \hbar^2} = Ry \times \frac{m^*}{m} \times \frac{1}{\epsilon^2} = 5.1 \cdot 10^{-5} Ry \approx 0.7 \text{ мэВ}.$$

Для радиуса Бора имеем:

$$a_B^* = \frac{\epsilon \hbar^2}{m^* e^2} = a_B \times \epsilon \times \frac{m}{m^*} = 1231 a_B \approx 65 \text{ нм},$$

что почти на 3 порядка больше постоянной решётки.

Полученные оценки соответствуют сделанным приближениям.

Комментарий: Поучительно напомнить здесь, что так как речь в данной задаче идёт о перенормировке констант, то можно легко с точностью до коэффициента получить условие перенормировки, пользуясь соотношением неопределённости. В основном состоянии неопределённости импульса и координаты порядка их среднеквадратичных значений, поэтому для основного состояния можно записать $p \times r \approx \hbar$. Для полной энергии

$$E = -\frac{e^2}{\epsilon r} + \frac{p^2}{2m^*} \simeq -\frac{e^2}{\epsilon r} + \frac{\hbar^2}{2m^* r^2}$$
 . У энергии есть минимум, соответствующий боровскому радиусу (при $r \rightarrow 0$ энергия растёт как $\frac{1}{r^2}$, при $r \rightarrow \infty$ $E < 0$ и растёт как $\frac{1}{r}$). С точностью оценки для нахождения минимума можно просто приравнять слагаемые и отбросить все численные множители ипа двойки, откуда $r_B \simeq \frac{\hbar^2 \epsilon}{e^2 m^*}$, а $Ry \simeq \frac{e^4 m^*}{\epsilon^2 \hbar^2}$. Так как нас интересует далее перенормировка известных значения для атома водорода $Ry^{(0)} = 13.6 \text{ эВ}$, $r_B^{(0)} = 0.5 \text{ \AA}$, то $Ry = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{m^*}{m} Ry^{(0)}$ и $r_B = \epsilon \frac{m}{m^*} r_B^{(0)}$. Выражения, естественно, совпадают с выше написанными.

Задача 4.40

На рисунке (рис.85 в задачнике) изображены положения химического потенциала μ , дна зоны проводимости и потолка валентной зоны в собственном полупроводнике типа InSb при температуре $T = 600 \text{ K}$. Используя данные рисунка, найти концентрации электронов и дырок при заданной температуре. Эффективные массы электронов и дырок $m_e = 0.05m_0$, $m_h = 0.4m_0$, где m_0 — масса свободного электрона.

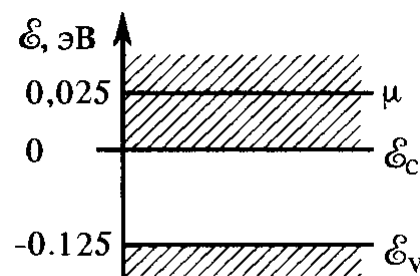


Рис. 85

Рисунок 1: К задаче 4.40

Решение:

Напомним, что для чистого полупроводника при $T=0$ уровень химического потенциала лежит точно посередине запрещенной зоны, а при конечной температуре может смещаться. Для слабого смещения (выводится на лекциях и в задаче 4.7 задачника)

$$\mu = -\Delta/2 + 0.75 T \ln \frac{m_h}{m_e}$$

Случай InSb специфичен тем, что запрещенная зона узкая, а массы электронов и дырок существенно отличается. В результате уровень химического потенциала может лежать в зоне проводимости, когда температура сопоставима с шириной запрещенной зоны.

При этом, естественно, число электронов будет равно числу дырок.

При вычислении концентрации электронов и дырок в полупроводнике обычно (и так было на лекции) полагается $(E - \mu) \gg T$, что позволяет перейти к бoльцмановской статистике и

существенно упрощает вычисления. В частности, правило рычага и следующий из него результат $n_{e,h} \propto \exp(-\Delta/(2T))$ получены именно в этом приближении. Когда уровень Ферми лежит в зоне проводимости, для электронов в зоне проводимости уже нельзя применять правило рычага. Точное вычисление фермиевского интеграла для определения концентрации электронов, как минимум, технически сложно. Однако в силу условия $n_e = n_h$, остающегося верным, можно вычислить концентрацию дырок.

При вычислении концентрации дырок пользуемся тем, что числа заполнений малы (поскольку $\Delta + \mu = 0.15 \text{ эВ} > T \approx 0.05 \text{ эВ}$). Тогда можно сразу воспользоваться готовым ответом, полученным на лекциях или в учебнике, с поправкой что из-за переноса начала отсчёта энергии в экспоненте должно стоять расстояние от потолка валентной зоны до химпотенциала $(\mu + \Delta)$:

$$n_h = 2 \left(\frac{m_h k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-(\mu + \Delta)/(k_B T)} \approx (1.8 \cdot 10^{19}) \times e^{-3} \text{ см}^{-3} \approx 1.0 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$$

При прямом вычислении концентрации дырок из-за отличного (по сравнению с выбором нуля отсчёта энергии на лекции) выбора ноля отсчёта энергии надо быть аккуратным, во избежание путаницы лучше просто прямо вычислить концентрацию вакансий в валентной зоне.

$$n_h = n_{vac} = 2 \int_0^\infty \left(1 - \frac{1}{e^{(-\Delta - \hbar^2 q^2 / (2m) - \mu) / T} + 1} \right) \frac{4\pi q^2 dq}{(2\pi)^3} = 2 \int_0^\infty \frac{1}{e^{(\Delta + \hbar^2 q^2 / (2m) + \mu) / T} + 1} \frac{q^2 dq}{2\pi^2} \approx \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty e^{-(\Delta + \hbar^2 q^2 / (2m) + \mu) / T} q^2 dq = \frac{1}{\pi^2} e^{-(\Delta + \mu) / T} \left(\frac{2mT}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-x^2} x^2 dx$$

Задача 4.25

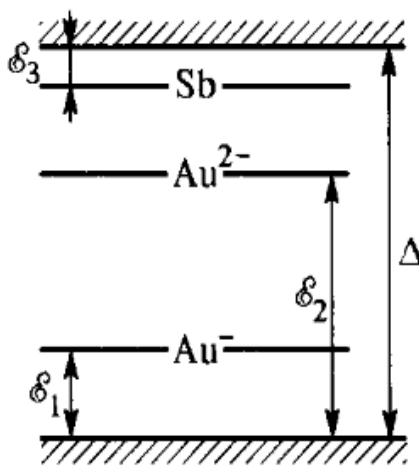


Рис. 79

В германий введены примеси золота $n_{Au} = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, атомы которого могут захватить один (на уровень Au^-) или два (один на уровень Au^- , а второй — на уровень Au^{2-}) электрона и сурьмы ($n_{Sb} = 1.5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$). Акцепторные уровни золота лежат выше потолка валентной зоны на $\epsilon_1 = 0.15 \text{ эВ}$ и $\epsilon_2 = 0.5 \text{ эВ}$, соответственно. Донорный уровень атомов сурьмы лежит на $\epsilon_3 = 0.01 \text{ эВ}$ ниже дна зоны проводимости (см.рис). Определить тип проводимости легированного кристалла и оценить концентрацию носителей при $T = 77 \text{ К}$. Ширина запрещенной зоны $\Delta = 0.7 \text{ эВ}$, а эффективные плотности состояний для зоны проводимости и валентной зоны (статфакторы зоны) равны между собой и равны 10^{18} см^{-3} .

Рисунок 2: К задаче 4.25

Указание: Специфика акцепторных уровней Au состоит в том, что уровень Au^{2-} появляется только после того, как будет заполнен электронами уровень Au^- (так называемые альтернативные уровни).

Решение:

Задача разобрана в задачнике, приводим здесь вариант решения.

Для нахождения количества носителей в зоне проводимости или в валентной зоне необходимо знать положение уровня химического потенциала. Для его нахождения сначала рассмотрим случай $T=0$. Собственные электроны все оказываются собраны в валентной зоне. Из-за наличия примесей электроны донора (сурьмы) могут занимать места на атомах акцептора (золота). По соотношению концентраций (сурьмы в полтора раза больше, чем золота) видно, что окажется полностью занят уровень Au^- и наполовину занят уровень Au^{2-} . При небольшом нагреве в первую очередь будет происходить переход электронов с уровня Au^{2-} на уровни сурьмы и в зону проводимости (по специфике альтернативного уровня, пока есть электроны на уровне Au^{2-} , электроны с уровня Au^- не уходят, а валентная зона гораздо дальше от зоны проводимости и уровня сурьмы, чем уровень Au^{2-} : 0.7 эВ и 0.2 эВ, соответственно).

Частичное заполнение уровня Au^{2-} при $T=0$ позволяет сразу указать положение уровня химического потенциала: так как на этом уровне есть вакансии при $T=0$ химпотенциал обязан с ним совпадать. Это аналогично случаю металла, где химический потенциал совпадает энергией последнего заполненного состояния.¹

Таким образом, при конечной температуре перераспределяется $\frac{n_{Sb}}{3}$ электронов, для формального нахождения положения химического потенциала при конечной температуре необходимо записать сохранение числа электронов. Мы уже знаем, что при $T=0$ уровень химического потенциала совпадает с уровнем Au^{2-} , однако будет ли он смещаться при нагреве интуитивно не ясно. Линейное по температуре смещение уровня химического потенциала приведёт к появлению дополнительной предэкспоненты для концентрации электронов в зоне: если $\mu = \delta + aT$, то $n_e = Q \exp(\mu/T) = [Q e^a] \times \exp(\delta/T)$. По этой же формальной причине в выражении «из учебника» для концентрации носителей в собственном полупроводнике перед щелью стоит корень из произведения статфакторов электронной и дырочной зон: $n_e = n_h = (Q_e Q_h)^{1/2} e^{-\Delta/(2k_B T)}$.

Для компактности записи будем отсчитывать энергию от дна зоны проводимости, положение уровня Au^{2-} равно $\delta = -0.2$ эВ, положение уровня сурьмы равно $-\varepsilon_3 = -0.01$ эВ. При малой конечной температуре мы можем считать, что для заполнения уровня сурьмы и зоны проводимости действует уже больцмановская статистика, 0.2 эВ ≈ 2000 К $\gg 77$ К, а для уровня Au^{2-} необходимо удерживать точное выражение. В итоге, уравнение сохранения числа электронов имеет вид:

¹ Есть два общих утверждения про положение уровня химического потенциала электронной системы при $T=0$: (i) если последний энергетический уровень частично заполнен или последний заполненный уровень лежит в непрерывном энергетическом спектре системы, то уровень химического потенциала совпадает с энергией последнего заполненного состояния («случай металла»); (ii) если последний заполненный уровень (или полностью заполненная зона) отделен от ближайшего свободного уровня (зоны) щелью конечной ширины, то уровень химического потенциала при $T=0$ лежит точно посередине между заполненным и незаполненным уровнями (точно посередине запрещенной зоны) («случай полупроводника»). Это чисто статистическое утверждение, оно будет, в частности, применимо при обсуждении задачи об уровнях Ландау в двумерной системе.

$$\begin{aligned} \frac{n_{Sb}}{3} &= n_{Au} \frac{1}{e^{(\delta-\mu)/T} + 1} + n_{Sb} \exp(-(-\varepsilon_3 - \mu)/T) + Q \exp(\mu/T) = \\ &= n_{Au} \frac{1}{e^{(\delta-\mu)/T} + 1} + [n_{Sb} \exp(\varepsilon_3/T) + Q] \exp(\mu/T) \end{aligned}$$

По условию задачи $\varepsilon_3 \approx T$ и $n_{Sb} \ll Q$, поэтому в основном электроны пойдут в зону проводимости и можно приближённо записать: $\frac{n_{Sb}}{3} \approx \frac{n_{Au}}{e^{(\delta-\mu)/T} + 1} + Q e^{\mu/T}$.

Вспользуемся тем, что $n_{Sb} = 1.5 n_{Au}$ и подставим $\mu = \delta + aT$: $\frac{1}{2} = \frac{1}{e^a + 1} + \frac{Q}{n_{Au}} e^a e^{\delta/T}$.

Видно, что при $T \rightarrow 0$ $a = 0$, то есть линейной по температуре зависимости уровня химического потенциала нет, с этой точностью уровень химического потенциала остаётся на уровне Au^{2-} .² Отсюда сразу ответ для искомой концентрации носителей в зоне:

$$n_e = Q \exp(\delta/T) \approx 8.7 \cdot 10^4 \text{ 1/см}^3.$$

Полупроводник оказывается полупроводником n-типа (количество подвижных электронов больше количества подвижных дырок).

Задача 4.21

При освещении электронного полупроводника вблизи его поверхности образуются дырки, которые затем диффундируют в объём, где рекомбинируют с электронами проводимости. Определить глубину проникновения дырок $l_{эфф}$, если их время жизни равно $\tau = 10^{-3}$ сек, подвижность $\mu = 2000 \text{ см}^2 / (\text{В} \cdot \text{сек})$. Температура полупроводника равна 300К.

Решение:

При рекомбинации дырок происходит люминесценция — процесс обратный рождению электрон-дырочных пар на поверхности. Времена свободного пробега носителей в полупроводнике порядка пикосекунд. Поэтому время жизни дырок до рекомбинации очень большое и движение дырок представляет собой диффузию (происходит много актов рассеяния до рекомбинации). Поскольку полупроводник электронный, число дырок очень мало, а значит их статистика заведомо классическая (больцмановская).

Глубину проникновения дырок можно оценить как $\sqrt{D\tau}$, где D - коэффициент диффузии. Коэффициент диффузии D может быть найден из соотношения Эйнштейна (вспоминаем 2-ой семестр): $D = k_B T \mu / e$.

Внимание: в отличие от формулы второго семестра в знаменателе возник заряд электрона, так как в физике полупроводников подвижностью называется не отношение дрейфовой скорости к вынуждающей силе, а отношение дрейфовой скорости к полю.

Окончательный ответ: $l \approx \sqrt{k_B T \mu \tau / e} \approx 0.2 \text{ см}$.

² В условиях задачи $e^{\delta/T} \approx e^{-30} \approx 8.7 \cdot 10^{-14}$, поэтому «в числах» уравнение на сдвиг химического потенциала принимает вид $\frac{1}{2} = \frac{1}{e^a + 1} + 8.7 \cdot 10^{-14} \times e^a$. Решением является $e^a \approx 1 + 34 \cdot 10^{-14}$ и сдвиг уровня химического потенциала aT оказывается ничтожен.