

# ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИЗОЛЯТОРЫ

Кунцевич Александр Юрьевич,  
ФИАН, отделение физики твердого тела  
Лаборатория сильно-коррелированных электронных систем



# Nobel Prize in Physics 2016



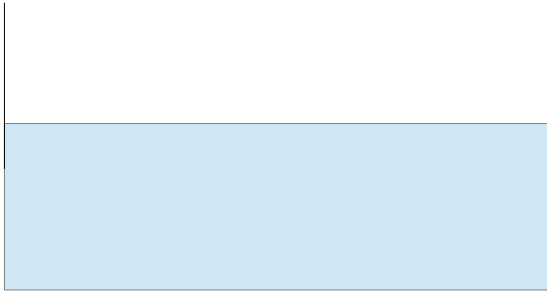
David Thouless  
(Univ. Of Washington)  
Dunkan Haldane  
(Princeton)

Prize motivation: "for theoretical discoveries of topological phase transitions and topological phases of matter"



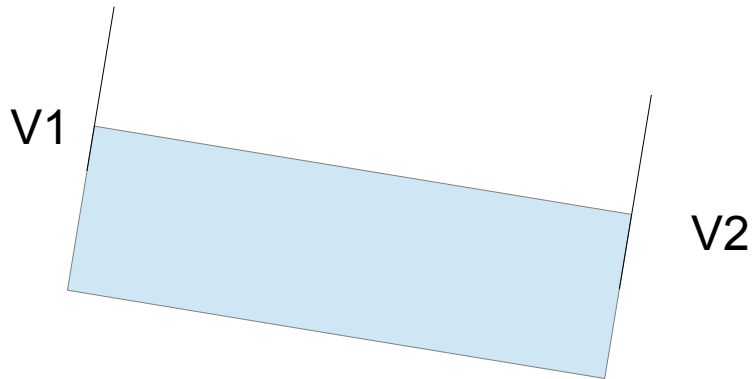
- ЧТО ТАКОЕ МЕТАЛЛ?

# ВЕЩЕСТВО КОТОРОЕ ХОРОШО ПРОВОДИТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК



$$F(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon_i - E_F}{kT}\right) + 1}$$

РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ ПРИВОДИТ К ТОКУ



Что такое изолятор?

- ВЕЩЕСТВО, КОТОРОЕ НЕ ПРОВОДИТ (или ПЛОХО ПРОВОДИТ) ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК.

**КАКИЕ БЫВАЮТ ИЗОЛЯТОРЫ?**

# КАКИЕ БЫВАЮТ ИЗОЛЯТОРЫ?

ЗОННЫЕ

АНДЕРСОНОВСКИЕ

КОРРЕЛИРОВАННЫЕ: МОТТОВСКИЕ, CDW, SDW

.....

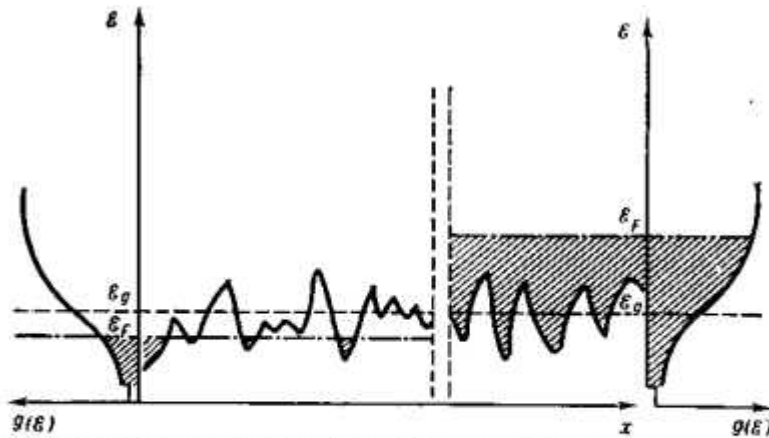
ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ??



# Андерсоновский изолятор



Филипп Андерсон



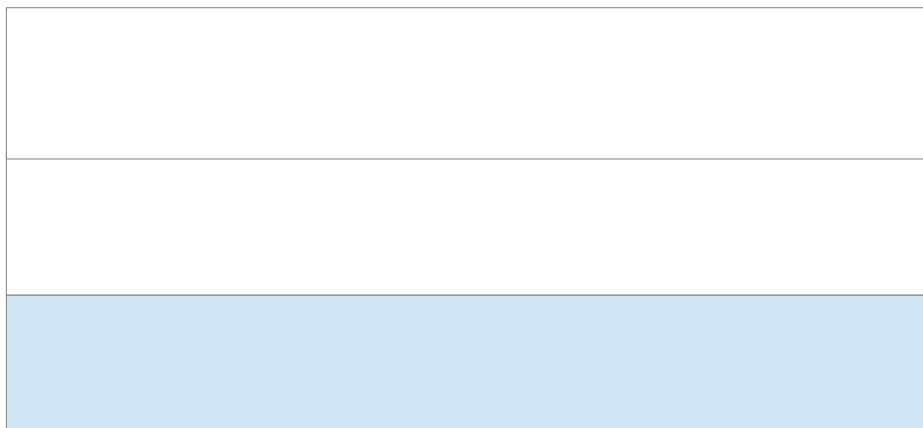
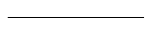
Схематическое изображение энергии электрона в поле потенциала в случае хаотически расположенных неоднородностей. Пунктир показывает положение порога подвижности  $\epsilon_g$  по краям плотности состояний  $g(\epsilon)$  и их заполнения, соответствующие андерсоновскому диэлектрику (слева) и металлу (справа). Штрих-пунктирная линия показывает положение энергии Ферми  $\epsilon_f$ . Заштрихованы заполненные энергетич. состояния в области подвижных состояний электрона.

= СИЛЬНО РАЗУПОРЯДОЧЕННАЯ СИСТЕМА



1977: for fundamental theoretical investigations of the electronic structure of disordered systems

# ЗОННЫЕ ИЗОЛЯТОРЫ

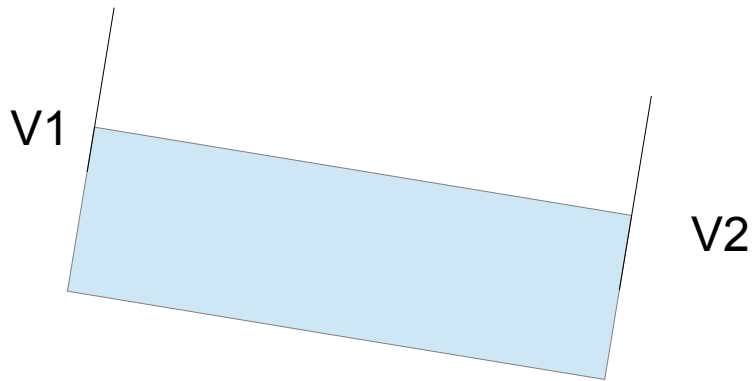


НА ПРИМЕРЕ ГИПОТЕТИЧЕСКОГО  
ВАН-ДЕР ВААЛЬСОВОГО КРИСТАЛЛА ГЕЛИЯ

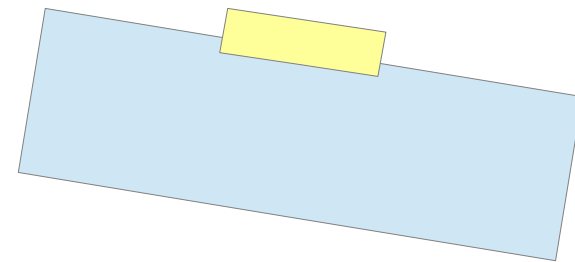


# ПОЧЕМУ ЗОННЫЙ ИЗОЛЯТОР НЕ ПРОВОДИТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

металл



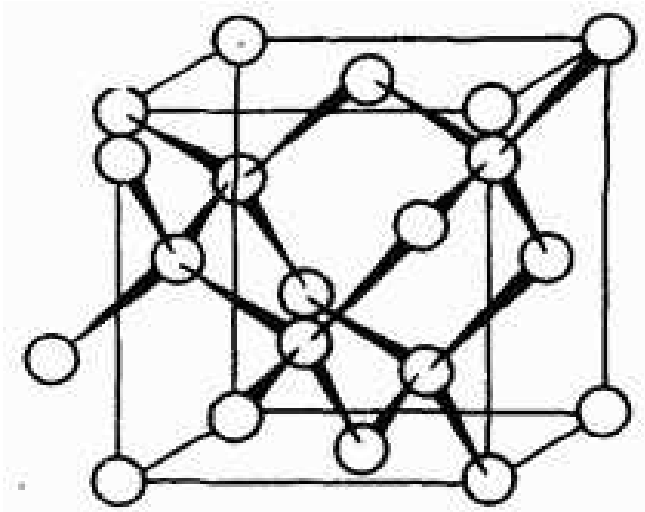
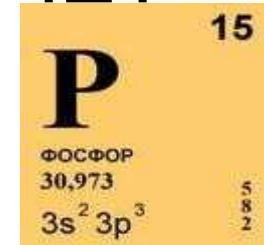
ЗАПОЛНЕННАЯ ЗОНА=  
ЗАМКУТЫЙ ПУЗЫРЕК



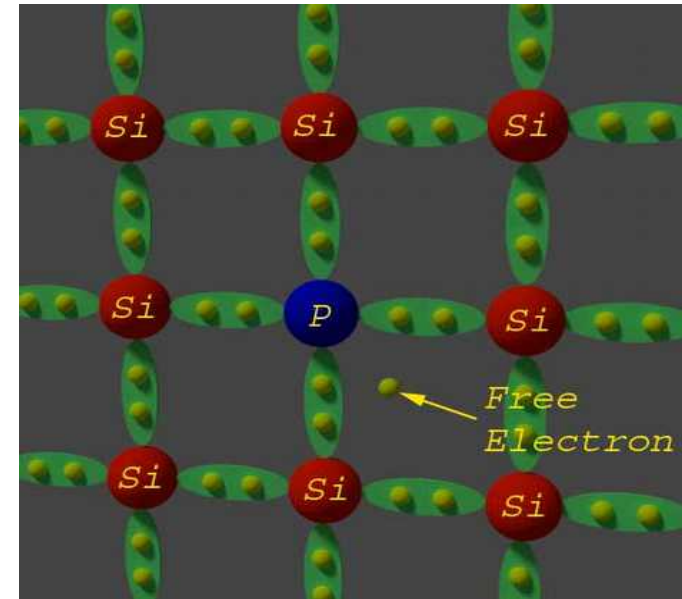
# РЕАЛЬНО В ИЗОЛЯТОРЕ ВСЕ АТОМНЫЕ ОРБИТАЛИ ЗАПОЛНЕНЫ ЗА СЧЕТ КОВАЛЕНТНЫХ СВЯЗЕЙ



sp<sup>3</sup>- гибридизация



В чистом кремнии у всех атомов полностью заполнена 3 орбиталь



Лишний электрон от донора будет сделан из 4s орбиталей

# Волны Блоха: решения УШ для периодического потенциала

## Bloch waves

Bloch's theorem:

Solutions of the Schrodinger equation

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \hat{V}(\mathbf{r}) \right) \Psi_k(\mathbf{r}) = \varepsilon_k \Psi_k(\mathbf{r})$$

for the wave in periodic potential  $U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}+\mathbf{R})$  are:

Bloch function:

$$\Psi_k(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u_k(\mathbf{r})$$

Envelope part

Periodic (unit cell) part

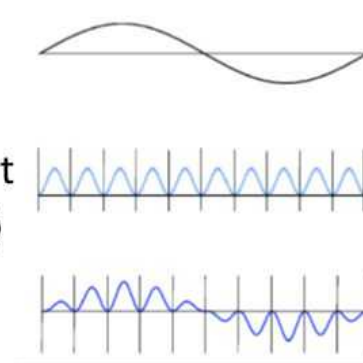
$$u_k(\mathbf{r}) = u_k(\mathbf{r} + \mathbf{R})$$



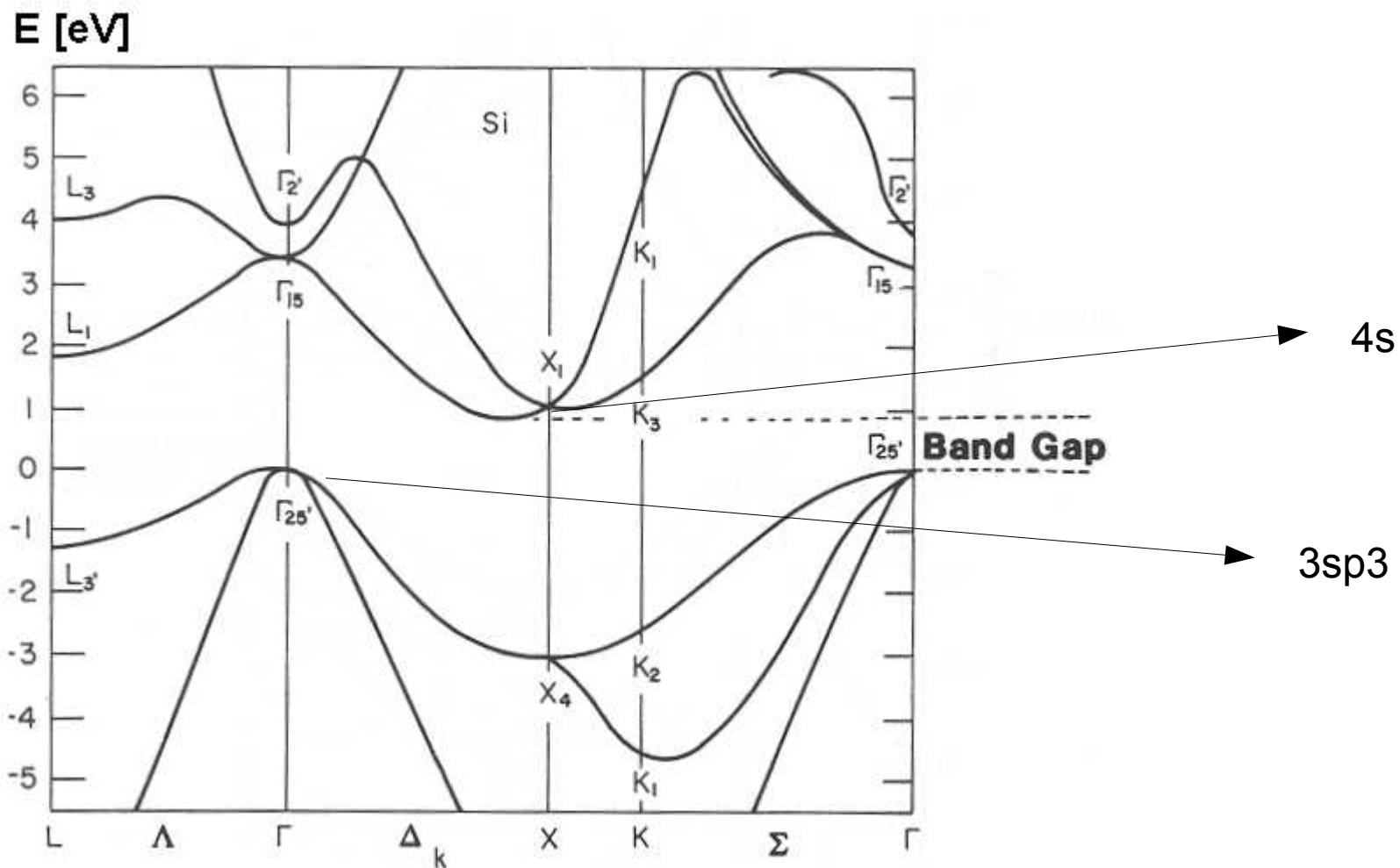
Felix Bloch  
1905, Zürich -  
1983, Zürich



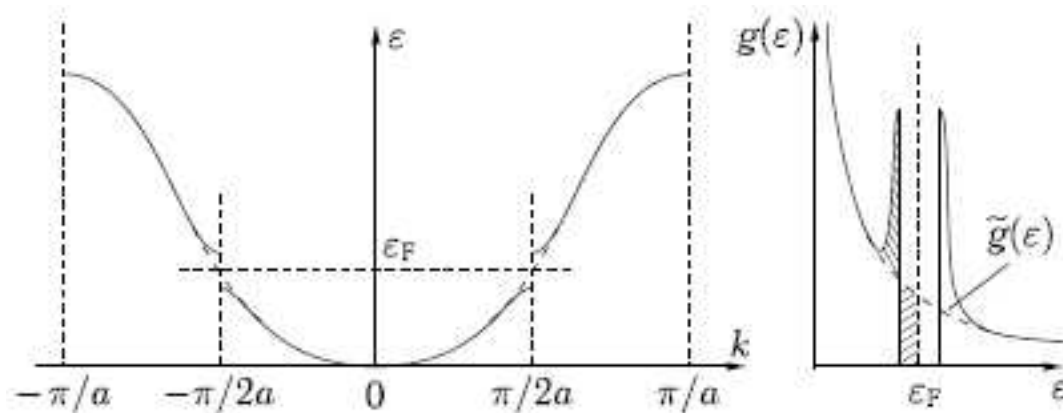
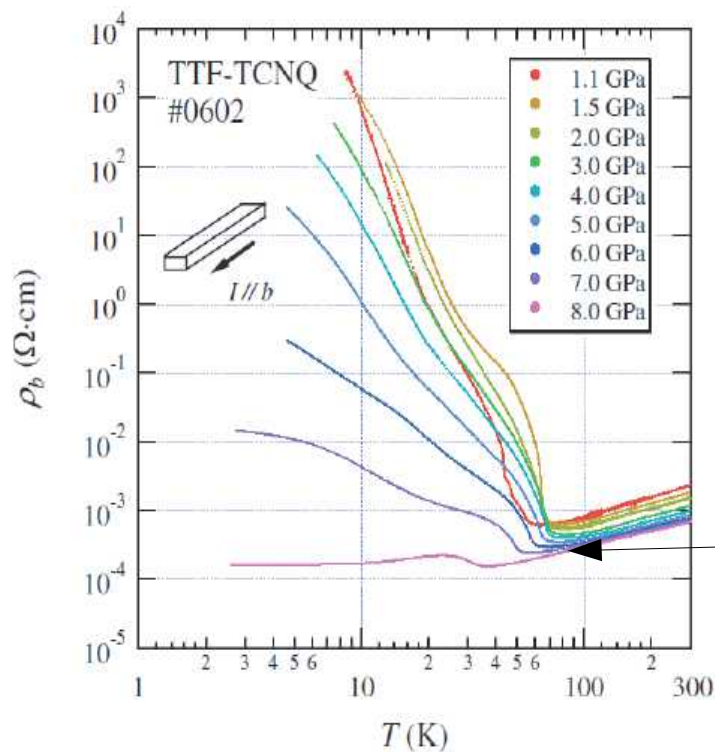
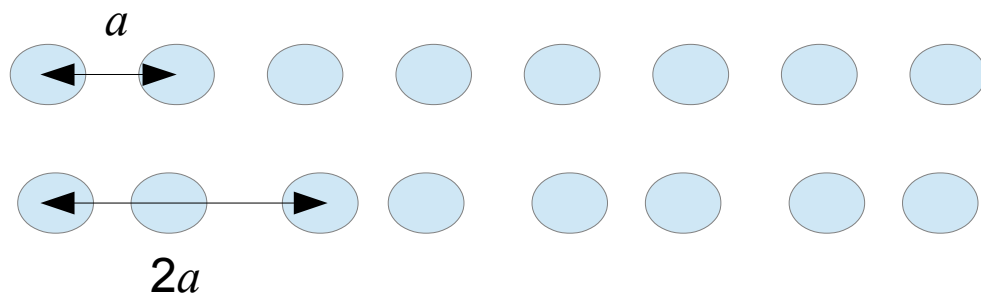
1952



# Закон дисперсии электронов в кремнии



# Коррелированные изоляторы. Переход Пайерлса в Q1D системах



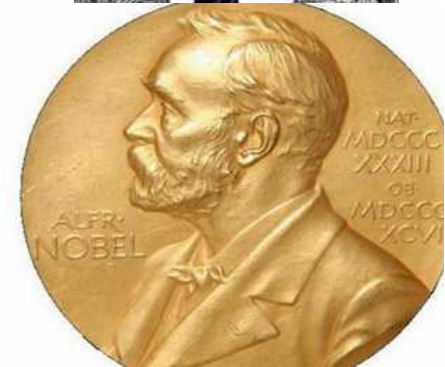
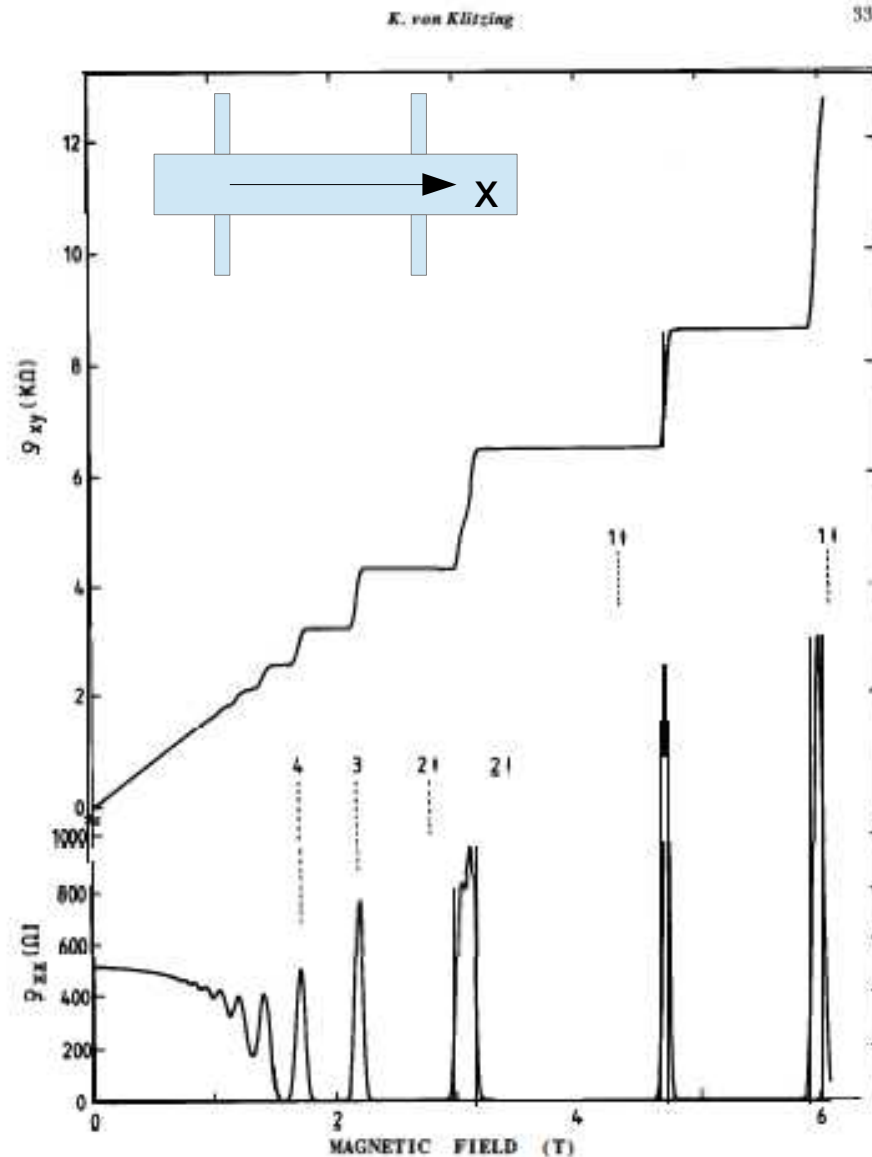
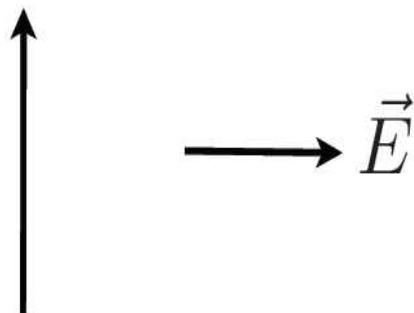
ПЕРЕХОД В ВЗП ВТОРОГО РОДА

# Стартовая система: КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА

$$j^x = \sigma_H E_y$$
$$\sigma_H = \nu \frac{e^2}{2\pi\hbar}$$

$\nu = \text{integer}$

current



Клаус фон  
Клитцинг  
1985



# ЧТО ПРОИСХОДИТ В РЕЖИМЕ КЭХ

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 \quad E_n = \hbar\omega_B \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad n \in \mathbb{N}$$

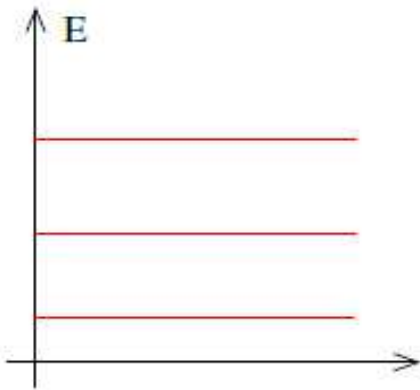
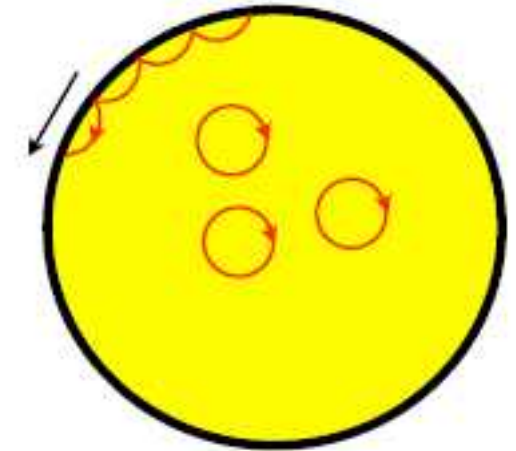


Figure 16: Density of states without disorder...

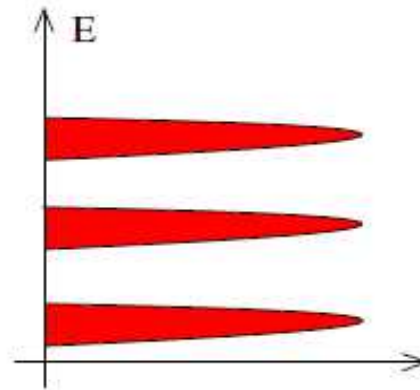
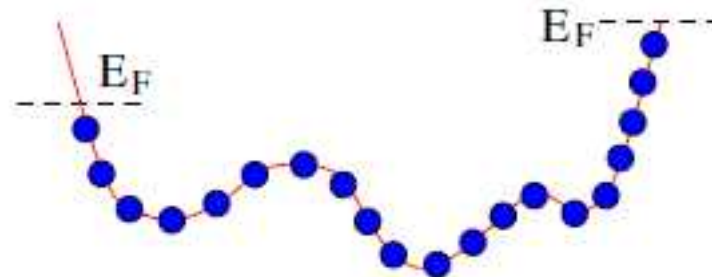
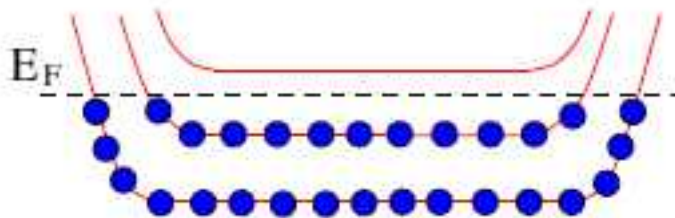


Figure 17: ...and with disorder.



# TKNN - инвариант

$$\sigma_H = \frac{ie^2}{2\pi h} \sum_n \int_{\text{Brillouin zone}} d^2k \int_{\text{unit cell}} d^2r \left( \frac{\partial u_n^*}{\partial k_1} \frac{\partial u_n}{\partial k_2} - \frac{\partial u_n^*}{\partial k_2} \frac{\partial u_n}{\partial k_1} \right)$$

TKNN first form

Sum over fully-occupied bands  
below the Fermi energy

$$\Psi_{kn}(\mathbf{r}) = u_n(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

BERRY CURVATURE

$$\int d^2r (\text{Gaussian curvature}) = 4\pi(1 - \text{genus}) = 2\pi(\text{Euler characteristic})$$

product of principal radii of curvature  $\frac{1}{R_1 R_2}$



Ball



Bagel



Swedish Pretzel



German Pretzel



mug



coffee cup



"loving cup"



???

ИТАК... КРАЕВЫЕ СОСТОЯНИЯ  
НЕЛЬЗЯ УНИЧТОЖИТЬ.  
ОНИ ЗАЩИЩЕНЫ ТОПОЛОГИЕЙ  
СИСТЕМЫ.



# ОПРЕДЕЛЕНИЕ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ИЗОЛЯТОР — ВЕЩЕСТВО, ЯВЛЯЮЩЕЕСЯ ИЗОЛЯТОРОМ В ОБЪЕМЕ, НО ИЗ-ЗА СИММЕТРИИ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ В ОБЪЕМЕ, НЕИЗБЕЖНО ИМЕЮЩЕЕ ПРОВОДЯЩИЕ СОСТОЯНИЯ НА КРАЮ (ПОВЕРХНОСТИ).

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ НЕ ОБЯЗАТЕЛЬНО!!!

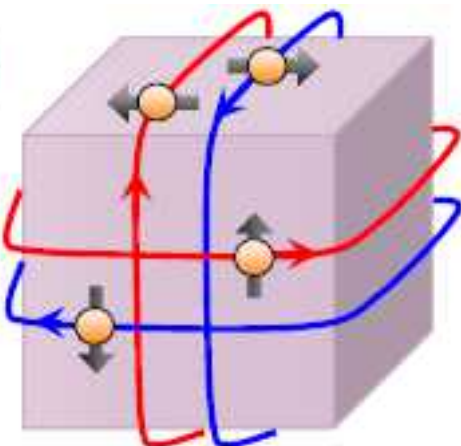
# Некоторые из известных ТИ (2013, Ando)

Type	Material	Band gap	Bulk transport	Remark	Reference
2D, $\nu = 1$	CdTe/HgTe/CdTe	< 10 meV	insulating	high mobility	31)
2D, $\nu = 1$	AlSb/InAs/GaSb/AlSb	~4 meV	weakly insulating	gap is too small	73)
3D (1;111)	Bi <sub>1-x</sub> Sb <sub>x</sub>	< 30 meV	weakly insulating	complex S.S.	36,40)
3D (1;111)	Sb	semimetal	metallic	complex S.S.	39)
3D (1;000)	Bi <sub>2</sub> Se <sub>3</sub>	0.3 eV	metallic	simple S.S.	94)
3D (1;000)	Bi <sub>2</sub> Te <sub>3</sub>	0.17 eV	metallic	distorted S.S.	95,96)
3D (1;000)	Sb <sub>2</sub> Te <sub>3</sub>	0.3 eV	metallic	heavily <i>p</i> -type	97)
3D (1;000)	Bi <sub>2</sub> Te <sub>2</sub> Se	~0.2 eV	reasonably insulating	$\rho_{xx}$ up to 6 $\Omega\text{cm}$	102, 103, 105)
3D (1;000)	(Bi,Sb) <sub>2</sub> Te <sub>3</sub>	< 0.2 eV	moderately insulating	mostly thin films	193)
3D (1;000)	Bi <sub>2-x</sub> Sb <sub>x</sub> Te <sub>3-y</sub> Se <sub>y</sub>	< 0.3 eV	reasonably insulating	Dirac-cone engineering	107, 108, 212)
3D (1;000)	Bi <sub>2</sub> Te <sub>1.6</sub> S <sub>1.4</sub>	0.2 eV	metallic	<i>n</i> -type	210)
3D (1;000)	Bi <sub>1.1</sub> Sb <sub>0.9</sub> Te <sub>2</sub> S	0.2 eV	moderately insulating	$\rho_{xx}$ up to 0.1 $\Omega\text{cm}$	210)
3D (1;000)	Sb <sub>2</sub> Te <sub>2</sub> Se	?	metallic	heavily <i>p</i> -type	102)
3D (1;000)	Bi <sub>2</sub> (Te,Se) <sub>2</sub> (Se,S)	0.3 eV	semi-metallic	natural Kawazulite	211)
3D (1;000)	TlBiSe <sub>2</sub>	~0.35 eV	metallic	simple S.S., large gap	110–112)
3D (1;000)	TlBiTe <sub>2</sub>	~0.2 eV	metallic	distorted S.S.	112)
3D (1;000)	TlBi(S,Se) <sub>2</sub>	< 0.35 eV	metallic	topological P.T.	116, 117)
3D (1;000)	PbBi <sub>2</sub> Te <sub>4</sub>	~0.2 eV	metallic	S.S. nearly parabolic	121, 124)
3D (1;000)	PbSb <sub>2</sub> Te <sub>4</sub>	?	metallic	<i>p</i> -type	121)
3D (1;000)	GeBi <sub>2</sub> Te <sub>4</sub>	0.18 eV	metallic	<i>n</i> -type	102, 119, 120)
3D (1;000)	PbBi <sub>4</sub> Te <sub>7</sub>	0.2 eV	metallic	heavily <i>n</i> -type	125)
3D (1;000)	GeBi <sub>4-x</sub> Sb <sub>x</sub> Te <sub>7</sub>	0.1–0.2 eV	metallic	<i>n</i> ( <i>p</i> ) type at $x = 0$ (1)	126)
3D (1;000)	(PbSe) <sub>5</sub> (Bi <sub>2</sub> Se <sub>3</sub> ) <sub>6</sub>	0.5 eV	metallic	natural heterostructure	130)
3D (1;000)	(Bi <sub>2</sub> )(Bi <sub>2</sub> Se <sub>2.6</sub> S <sub>0.4</sub> )	semimetal	metallic	(Bi <sub>2</sub> ) <sub><i>n</i></sub> (Bi <sub>2</sub> Se <sub>3</sub> ) <sub><i>m</i></sub> series	127)
3D (1;000)	(Bi <sub>2</sub> )(Bi <sub>2</sub> Te <sub>3</sub> ) <sub>2</sub>	?	?	no data published yet	128)
3D TCI	SnTe	0.3 eV (4.2 K)	metallic	Mirror TCI, $n_M = -2$	62)
3D TCI	Pb <sub>1-x</sub> Sn <sub>x</sub> Te	< 0.3 eV	metallic	Mirror TCI, $n_M = -2$	164)
3D TCI	Pb <sub>0.77</sub> Sn <sub>0.23</sub> Se	invert with <i>T</i>	metallic	Mirror TCI, $n_M = -2$	162)
2D, $\nu = 1$ ?	Bi bilayer	~0.1 eV	?	not stable by itself	82, 83)
3D (1;000)?	Ag <sub>2</sub> Te	?	metallic	famous for linear MR	134, 135)
3D (1;111)?	SmB <sub>6</sub>	20 meV	insulating	possible Kondo TI	140–143)
3D (0;001)?	Bi <sub>14</sub> Rh <sub>3</sub> I <sub>9</sub>	0.27 eV	metallic	possible weak 3D TI	145)
3D (1;000)?	RBiPt ( <i>R</i> = Lu, Dy, Gd)	zero gap	metallic	evidence negative	152)

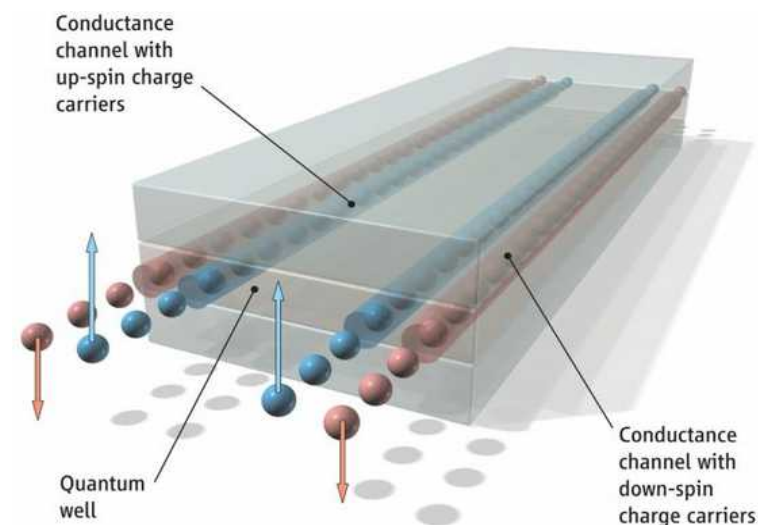


# ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИЗОЛЯТОРЫ

3D



2D



Письма в ЖЭТФ, том 42, вып. 4, стр. 145 – 148

25 августа 1985 REPORT

**БЕЗМАССОВЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ЭЛЕКТРОНЫ В ИНВЕРСНОМ КОНТАКТЕ**

*Б.А.Волков, О.А.Панкратов*

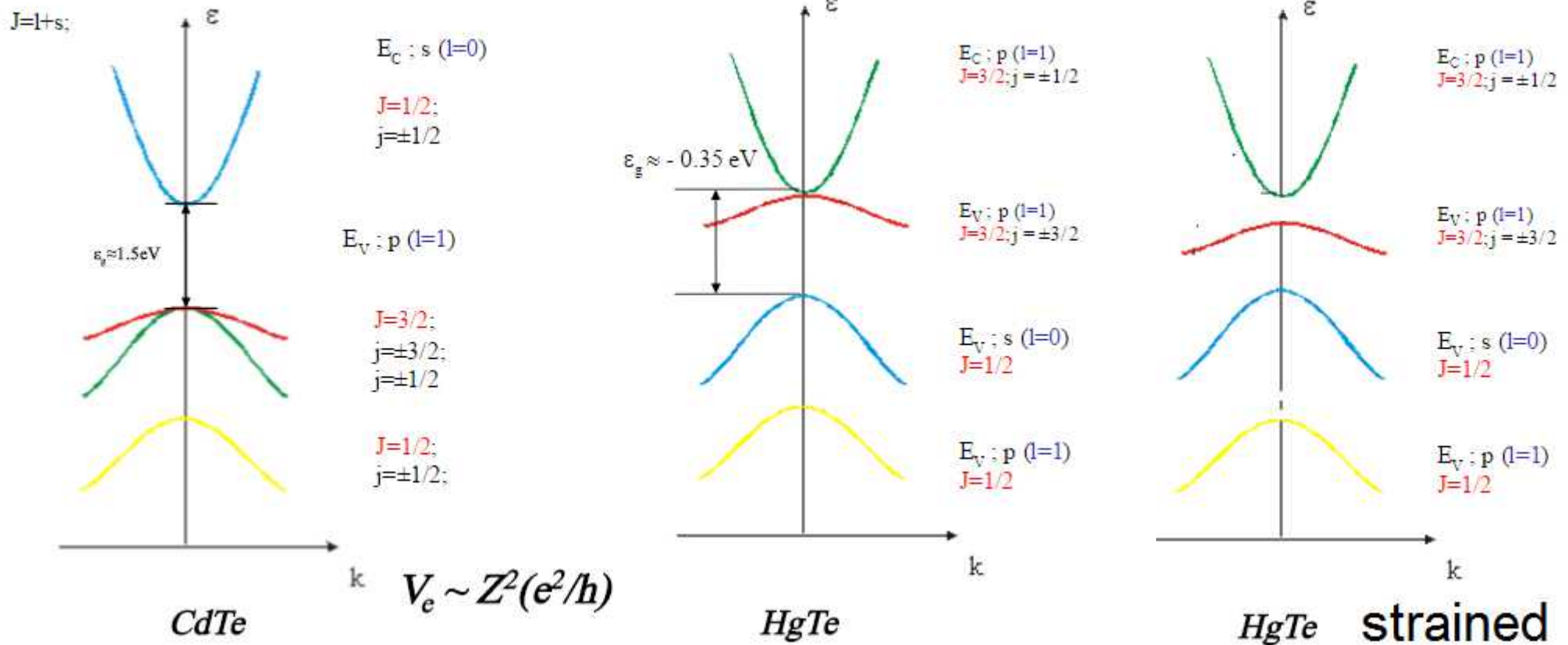
Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in HgTe Quantum Wells

B. Andrei Bernevig<sup>1,2</sup>, Taylor L. Hughes<sup>1</sup>, Shou-Cheng Zhang<sup>1\*</sup>

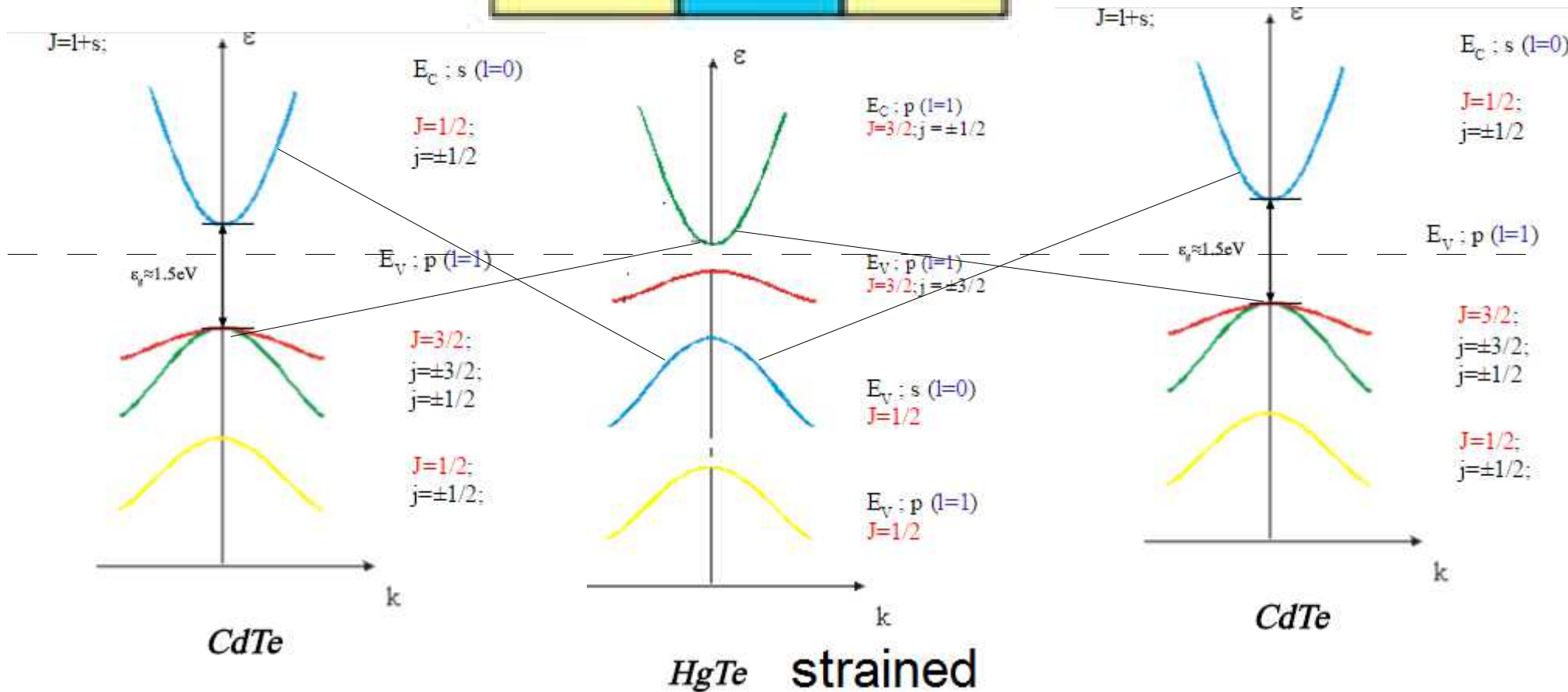
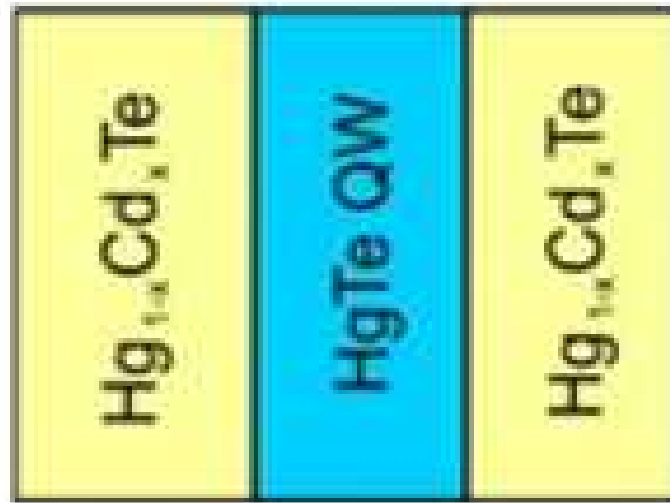
+ See all authors and affiliations

Science 15 Dec 2006: .....

# СТАРТОВЫЙ МАТЕРИАЛ — УЗКОЗОННЫЙ ПОЛУПРОВОДНИК



ПОМЕСТИМ НАПРЯЖЕННЫЙ  
СЛОЙ HgTe между обкладок CdTe

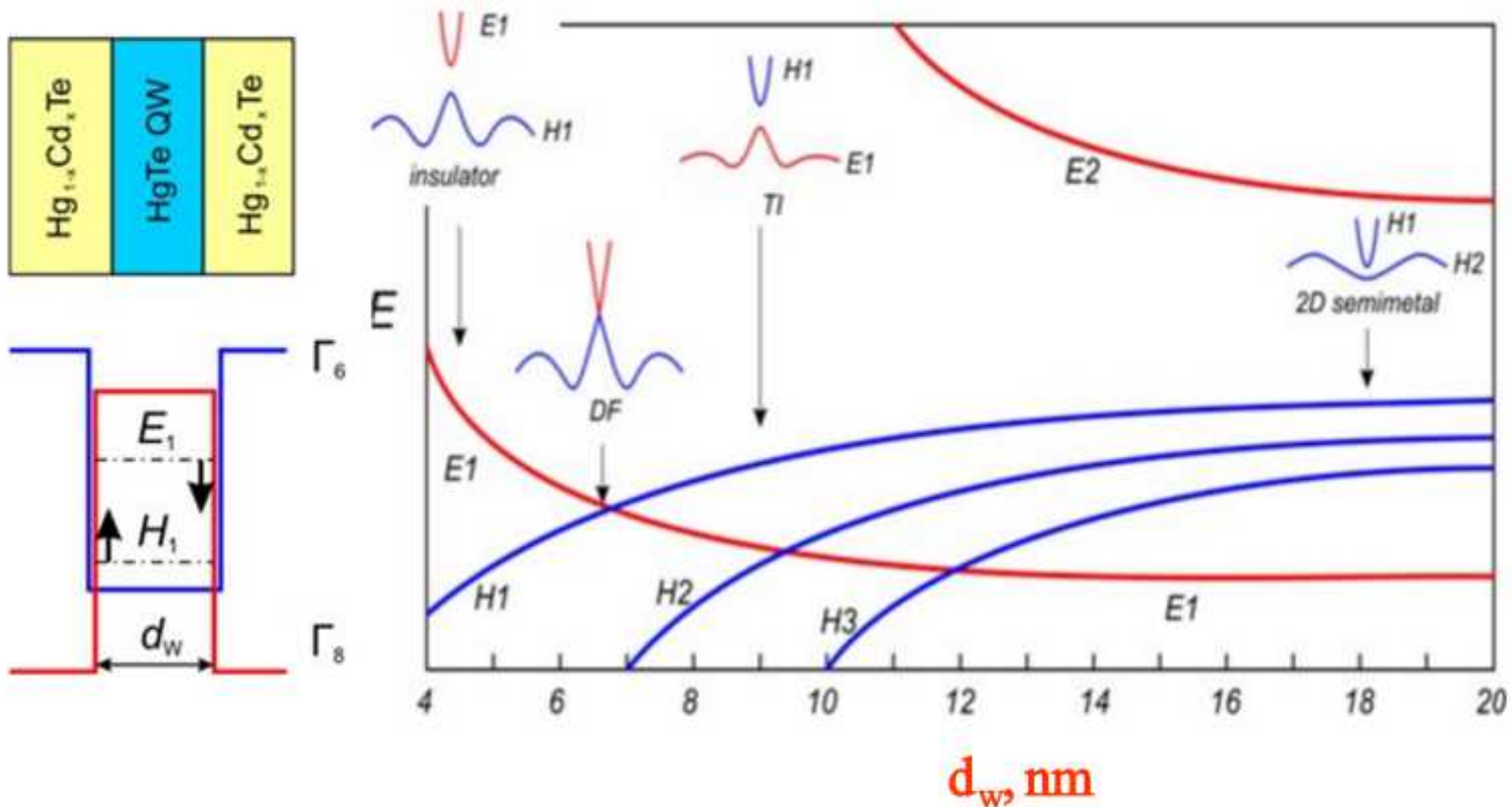




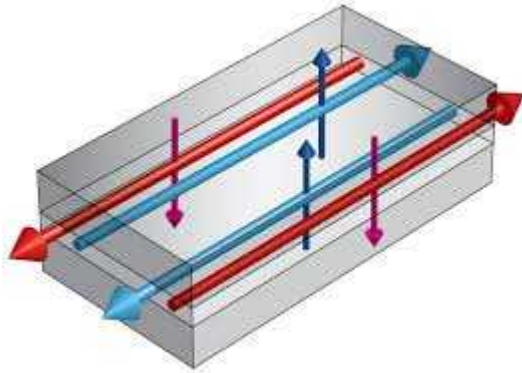
# АНАЛОГИЯ ИЗ ЖИЗНИ



# КВАНТОВАЯ ЯМА HgTe — система с перестраиваемым спектром



# СВОЙСТВА 2D TRS ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ИЗОЛЯТОРОВ

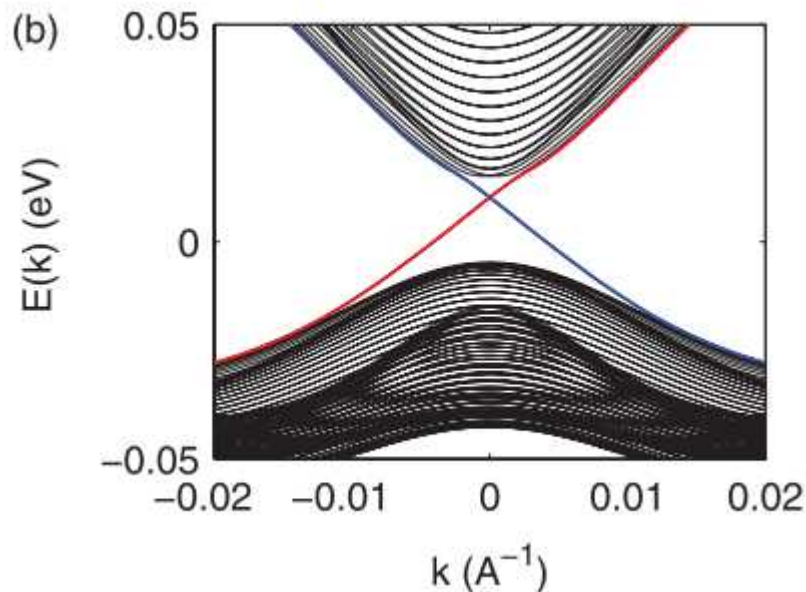


НЕТ РАССЕЯНИЯ НАЗАД В ОТСУТСТВИИ  
МАГНИТНЫХ ПРИМЕСЕЙ

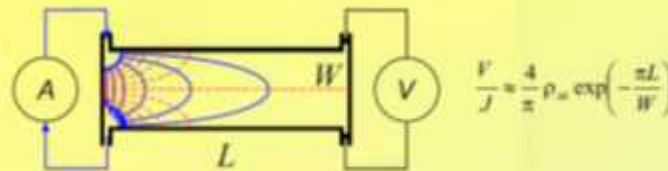
ПРОТЕКАНИЕ ТОКА  $\Leftrightarrow$  ПРОТЕКАНИЕ СПИНА

СПЕКТР КРАЕВЫХ СОСТОЯНИЙ — ЛИНЕЙНЫЙ

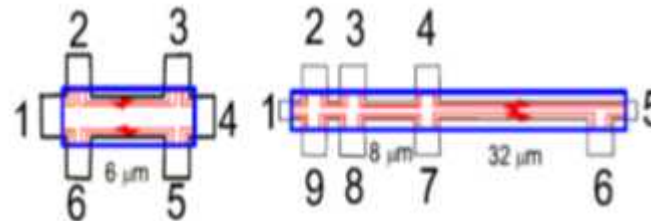
НЕЛОКАЛЬНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ



What is non-local transport?

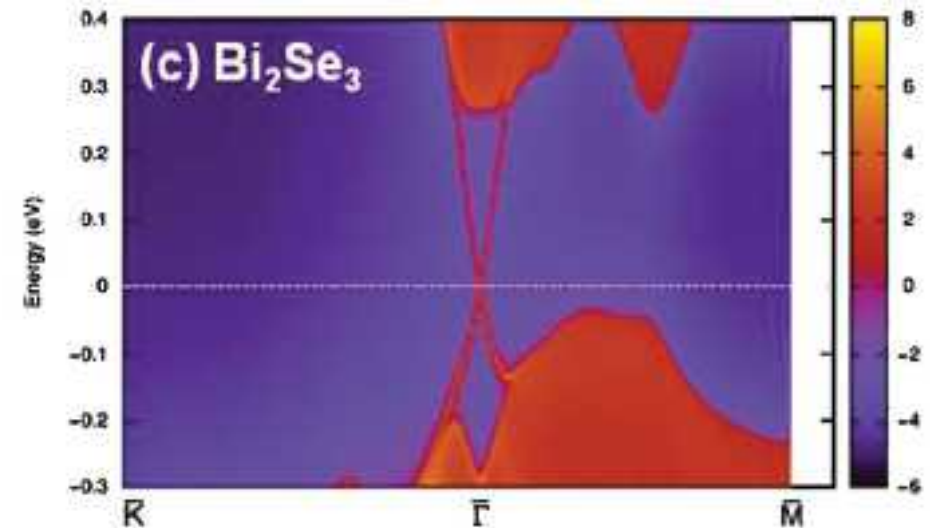
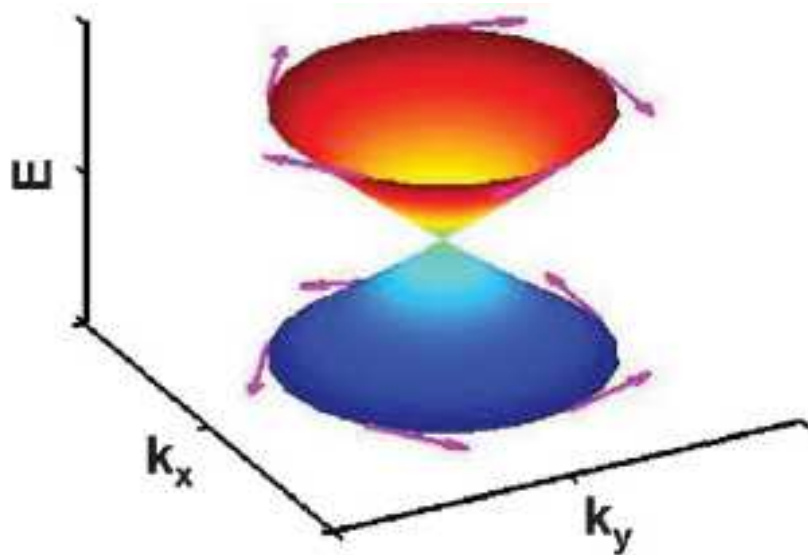


Basically, in nonlocal geometry of measurements one should organize current flow at one sample area and measure voltage in another area. Classical Drude theory predicts exponentially small measured signal.



$$R_{nl} \approx 2 \cdot 10^{-3} \rho_{xx} \text{ для } L/W = 2$$

# СВОЙСТВА TRS-protected 3D TI



Zhang, H., C.-X. Liu, X.-L. Qi, X. Dai, Z. Fang, and S.-C. Zhang, 2009, *Nature Phys.* 5, 438.

Current Flow => Spin polarization

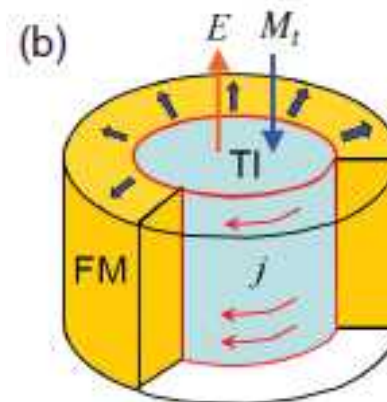
$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = v[\psi^\dagger(\mathbf{x})\boldsymbol{\sigma}\psi(\mathbf{x}) \times \hat{\mathbf{z}}] = v\mathbf{S}(\mathbf{x}) \times \hat{\mathbf{z}}.$$

Backscattering is prohibited

Topological magnetoelectric effect

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} + 2P_3\alpha\mathbf{E},$$

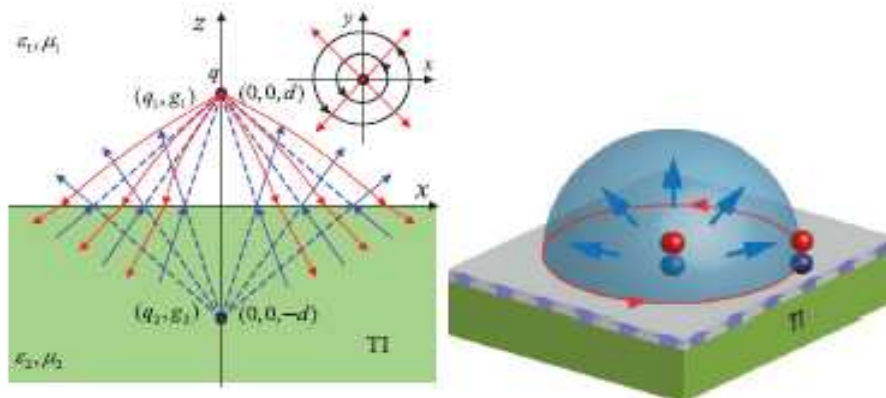
$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} - 2P_3\alpha\mathbf{B},$$





# Topological magnetoelectric effect

Possible observation of image magnetic monopole (not observed yet)



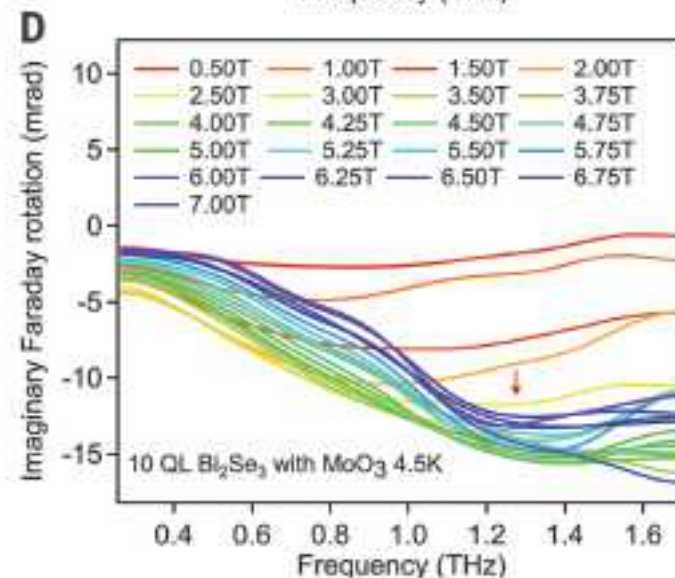
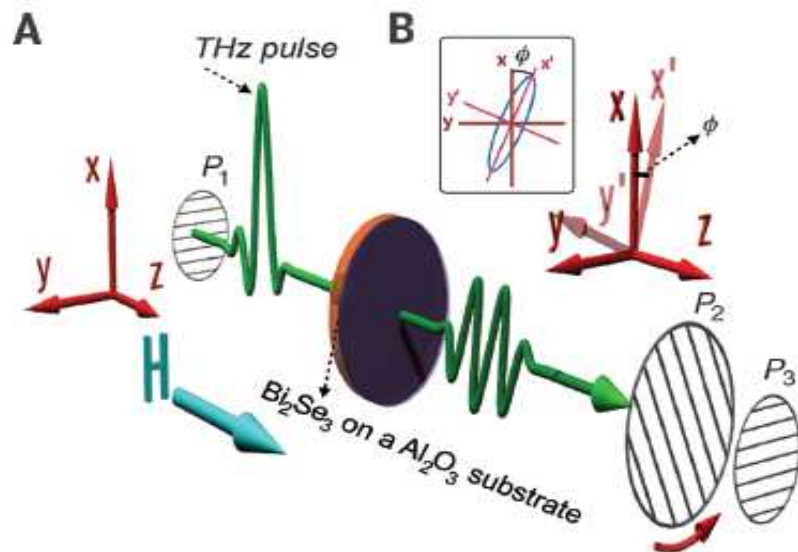
## Quantized Faraday and Kerr rotation and axion electrodynamics of a 3D topological insulator

Liang Wu,<sup>1\*</sup> M. Salehi,<sup>2</sup> N. Koirala,<sup>3</sup> J. Moon,<sup>3</sup> S. Oh,<sup>3</sup> N. P. Armitage<sup>1\*</sup>

**SCIENCE**

2 DECEMBER 2016

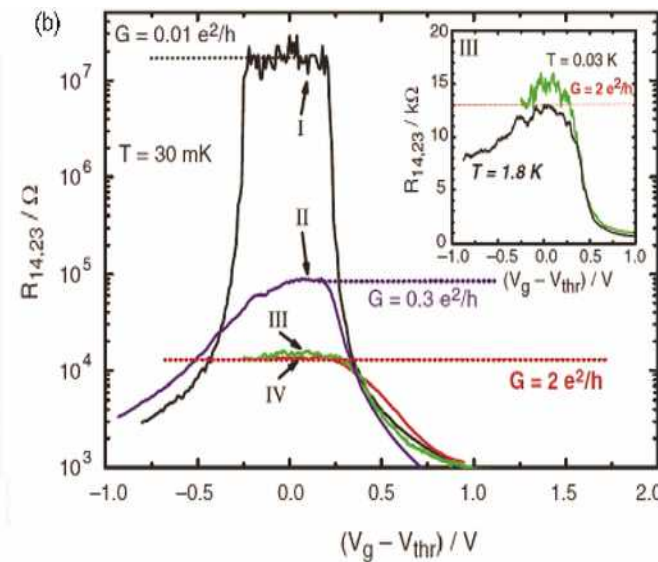
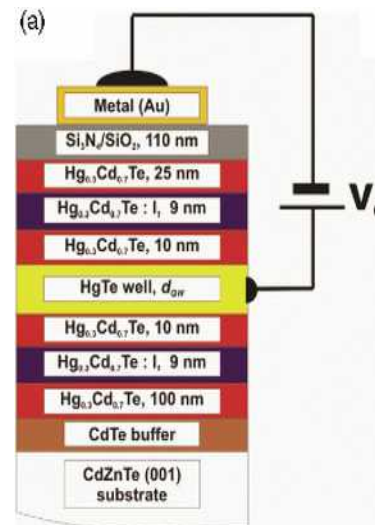
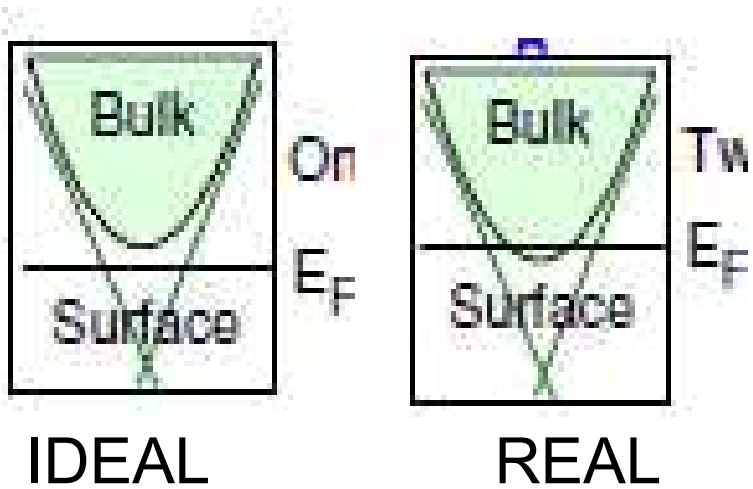
VOL 354 ISSUE 6316



# ПРОБЛЕМЫ ТОП. ИЗОЛЯТОРОВ

НЕ ОЧЕНЬ ИЗОЛЯТОР

НЕ ОЧЕНЬ  
ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ

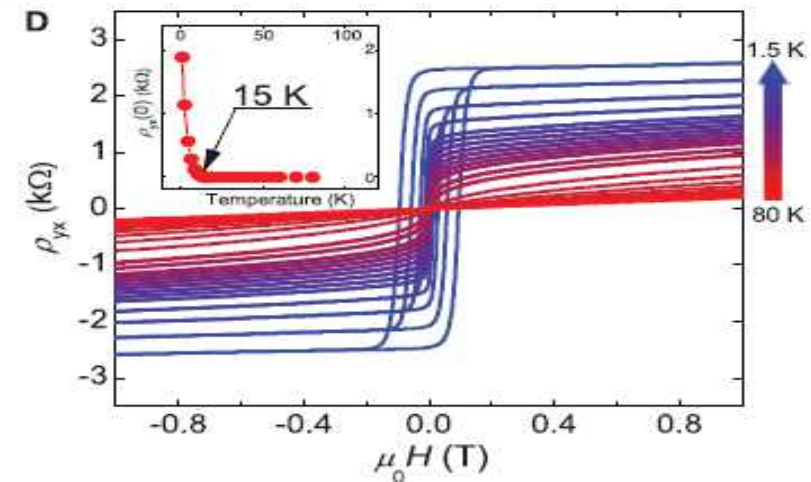


ТОЛЬКО В ОБРАЗЦЕ МИКРОННЫХ  
РАЗМЕРОВ

# ТИ + МАГНИТНЫЕ ПРИМЕСИ => КВАНТОВЫЙ АНОМАЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА

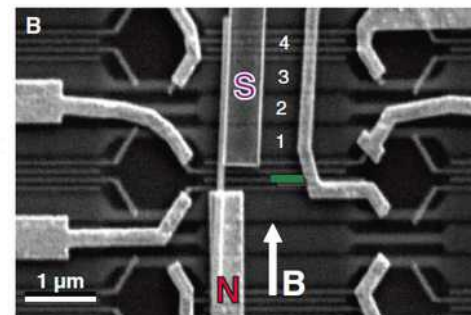
SCIENCE VOL 340 12 APRIL 2013 167

## Experimental Observation of the Quantum Anomalous Hall Effect in a Magnetic Topological Insulator





# Signatures of Majorana Fermions in Hybrid Superconductor-Semiconductor Nanowire Devices

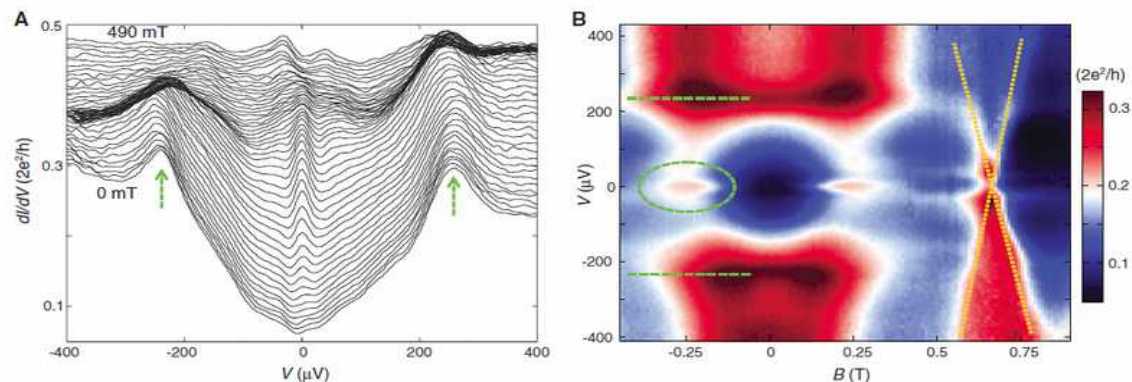


V. Mourik,<sup>1\*</sup> K. Zuo,<sup>1\*</sup> S. M. Frolov,<sup>1</sup> S. R. Plissard,<sup>2</sup> E. P. A. M. Bakkers,<sup>1,2</sup> L. P. Kouwenhoven<sup>1†</sup>

SCIENCE VOL 336 25 MAY 2012

23 March 2012; accepted 5 April 2012

Published online 12 April 2012;

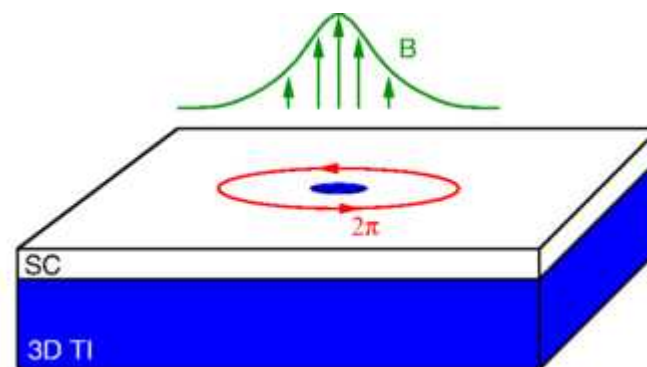
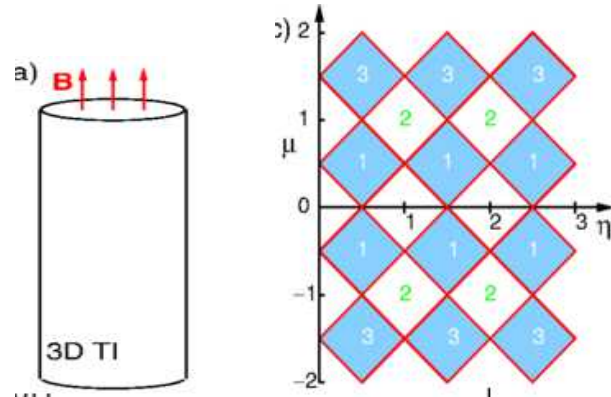


**Fig. 2.** Magnetic field-dependent spectroscopy. (A)  $dI/dV$  versus  $V$  at 70 mK taken at different  $B$  fields (from 0 to 490 mT in 10-mT steps; traces are offset for clarity, except for the lowest trace at  $B = 0$ ). Data are from device 1. Arrows indicate the induced gap peaks. (B) Color-scale plot of  $dI/dV$  versus  $V$

and  $B$ . The ZBP is highlighted by a dashed oval; green dashed lines indicate the gap edges. At  $-0.6$  T, a non-Majorana state is crossing zero bias with a slope equal to  $-3$  meV/T (indicated by sloped yellow dotted lines). Traces in (A) are extracted from (B).

## TI+ superconductivity

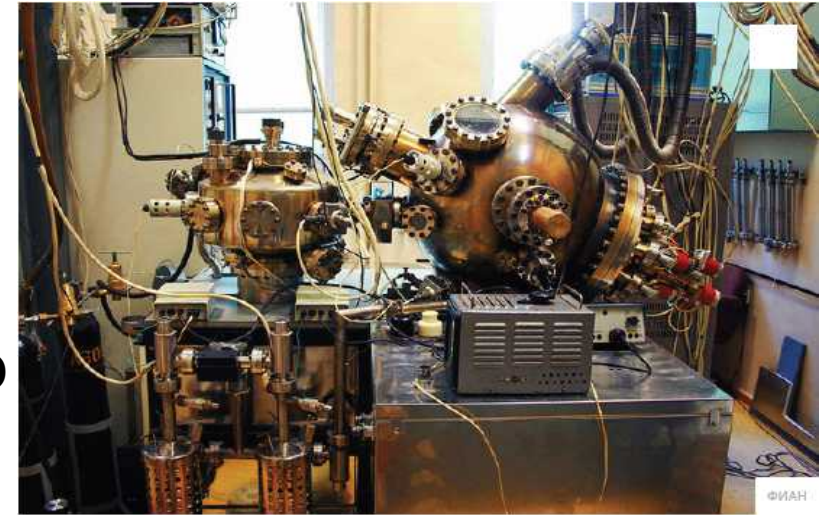
Majorana fermion = Andreev bound state in TSC





# ФИАН: центр высокотемпературной сверхпроводимости и СП наноструктур

Сверхнизкие температуры



млЭ

Микро и нанофабрикация **Магнитные поля до 21Т**

микроскопия



# Примеры задач, которые мы решаем:

1. Создание *топологического транзистора*
2. Новый топологический(?) Сверхпроводник  $\text{SrBi}_2\text{Se}_3$
3. Искусственная макронеоднородная двумерная среда: поиск новых фаз
4. Измерение энтропии двумерных систем
5. Туннельный контакт к самому высокотемпературному сверхпроводнику:  $\text{H}_2\text{S}$

**Приходите в гости и на дипломную практику. Нужны сильные студенты после 2-3 крса. ФОПФ-compatible учебный процесс.**

Кунцевич Александр Юрьевич  
[Kuntsevich.alexander@gmail.com](mailto:Kuntsevich.alexander@gmail.com)  
8-9262638023

# **СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**

# ARPES

