Неделя 3. Электронный ферми-газ.

Здесь приводятся решения задач для разбора на семинаре для лекционного потока ФОПФ, 6 семестр, 2017-2018 уч.год. О замеченных опечатках, ошибках и неточностях просьба сообщать В.Н.Глазкову vglazkov@yandex.ru

Оглавление

Задача 3.13

Ультрахолодные нейтроны содержатся в ловушке при низкой температуре, так что их газ вырожден. Как изменится их средняя кинетическая энергия, если включить магнитное поле, полностью их поляризующее. Пренебречь процессами распада нейтронов.

<u>*Комментарий:*</u> задача связана с понятием парамагнетизма Паули: в слабых магнитных полях происходит частичная поляризация ферми-газа.

Средняя кинетическая энергия ферми-газа равна $0.6\,E_F$ для вырожденного случая. Это вычисляется прямолинейно усреднением по всем электронам:

$$\overline{E}=\frac{1}{n}2\int_0^{k_F}\frac{\hbar^2k^2}{2m}\frac{4\pi k^2\,dk}{(2\pi)^3}=\frac{3\hbar^2}{2m(3\pi^2n)}\frac{1}{5}k_F^5=\frac{3}{5}\frac{\hbar^2k_F^2}{2m}=0.6\,E_F\quad.$$

В задаче сохраняется полное число частиц которое пропорционально $g_sE_F^{3/2}$, где g_s - спиновое вырождение (2 для нулевого поля и 1 для сильного поля).

Соответственно при спиновой поляризации энергия Ферми и средняя энергия возрастут в $2^{2/3}\approx1.6$ раз.

Задача 3.5

Оценить, каково относительное увеличение средней энергии электронов в металле с $E_F=5$ эВ при увеличении температуры от 0 до комнатной.

<u>*Комментарий:*</u> Качественно задача решена в задачнике. Качественное решение исходит из понимания, что в вырожденном ферми-газе при повышении температуры меняется только функция распределения вблизи поверхности Ферми. Эта оценка может отличаться множителями. Возможно и более строгое решение, приводимое ниже.

Оценка:

Средняя энергия в ферми-газе (см. 3.13 выше) $\bar{E}=\frac{3}{5}E_F$

При нагреве от 0К до температуры T меняется примерно на T энергия частиц в слое на поверхности Ферми, размытом по энергии примерно на T. Число таких частиц $\Delta N\simeq D(E_F)T$, где плотность состояний на поверхности Ферми[1] $D(E_F)=\frac{3}{2}\frac{N}{E_F}$.

Отсюда для искомого отношения:

$$\frac{\overline{\Delta E}}{\bar{E}}\simeq\frac{1}{N}\frac{\Delta N\times T}{\bar{E}}=\frac{3/2}{3/5}\left(\frac{T}{E_F}\right)^2=\frac{5}{2}\left(\frac{T}{E_F}\right)^2$$

Это вдвое отличается от оценки в задачнике, можно исправить словами, что «изменяются состояния частиц в слое размытому по энергии на $\pm T$, но это уже превышение точности качественного рассмотрения.

Точное решение:

Строгое рассмотрение проще всего провести на языке квазичастиц. Рассмотрим эффект размытия распределения вблизи поверхности Ферми как рождение частиц и античастиц. Химпотенциал этих квазичастиц нулевой (они рождаются до достижения теплового равновесия), плотность состояний вблизи нулевой энергии равна плотности состояний для электронов на поверхности Ферми. Вклад в энергию от частиц и античастиц одинаков для Ферми-газа. Отсюда сразу приращение энергии ферми-газа

$$\Delta E\approx 2D(E_F)\int_0^\infty\frac{\varepsilon\,d\varepsilon}{e^{\varepsilon/T}+1}=2\frac{3}{2}\frac{N}{E_F}T^2\int_0^\infty\frac{x\,dx}{e^x+1}$$

Множитель 2 связан с учётом вкладов частиц и античастиц (интегрируем только по частицам), плотность состояний вынесена из-под интегрирования, что оправдано для $T\ll E_F$, интеграл табличный и равен $\frac{\pi^2}{12}$.

Подстановкой и нормировкой на среднюю энергию получаем для искомого отношения

$$\frac{1}{N}\frac{\Delta E}{\bar{E}}=\frac{5}{12}\pi^2\approx 4.1\left(\frac{T}{E_F}\right)^2,$$

что отличается множителем от качественной оценки.

[1] $D(E_F)=\left.\frac{dN}{dE}\right|_{E=E_F}=\left(\frac{dN}{dk}\frac{1}{\frac{dE}{dk}}\right)_{E=E_F}=\frac{2\times 4\pi k_F^2}{(2\pi)^3/V}\cdot\frac{1}{\hbar^2 k_F/m}=\frac{1}{2\pi^2}V k_F^3\frac{1}{E_F}=\frac{3}{2}\frac{N}{E_F}$

Задача 3.22

Определить давление и сжимаемость электронного газа в меди при $T=0$. $n=8\cdot 10^{22}\ см^{-2}$. *Массу электрона принять равной массе свободного электрона.*

Давление в нерелятивистском газе ищется по формуле $E=\frac{3}{2}PV$, где E - полная кинетическая энергия частиц (электронов) в объёме V . Альтернативно, можно вычислить полную энергию $E=N\,\overline{E}=0.6\,N\,E_F=\frac{0.6\hbar^2}{2m}N\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3}$ и воспользоваться тем, что $dE=-P\,dV$.

Отсюда:

$$P=\frac{2}{3}\times\frac{E}{V}=\frac{2}{3}\times 0.6\mathrm{n}\frac{p_F^2}{2\mathrm{m}}=0.2\frac{\hbar^2}{m}n(3\pi^2 n)^{2/3}=0.2\hbar^2(3\pi^2)^{2/3}\frac{n^{5/3}}{m}\ .$$

Это составляет $2.71\cdot 10^6\ см^{-1}с^{-2}г=2.71\cdot 10^7\ Па=271\ атм$.

Сжимаемость считается по определению $\beta=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$. Поскольку $n=N/V$, то $n\frac{\partial}{\partial n}=-V\frac{\partial}{\partial V}$ и $\beta=-\frac{1}{V}\frac{1}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}=\frac{1}{n}\frac{1}{\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)}=\frac{0.6}{P}$

Задача Т.3.1

Найти радиус нейтронной звезды с массой M *, равной двум массам Солнца, и температурой не выше* $T=10^9 K$. *Радиационным давлением пренебречь.*

Напомним, что нейтрон является ферми-частицей. Предположим, что плотность вещества нейтронной звезды настолько высока, что газ остаётся вырожденным при температуре $T=10^9 K$. Также будем считать вещество нейтронной звезды сжатым практически до ядерной плотности и более несжимаемым — то есть концентрацию нейтронов постоянной.
Равновесие звезды определяется балансом гравитационного сжатия и давления ферми-газа. В «живой» звезде гравитационному сжатию противодействует радиационное давление излучения, образующегося в результате термоядерной реакции, но на нейтронной звезде термоядерные реакции уже не протекают. «Остаточным» радиационным давлением за счёт теплового излучения по условию пренебрегаем.
Пусть концентрация нейтронов n . Тогда плотность звезды nm , здесь $m=1.67\cdot 10^{24}\ г$ — масса нейтрона.

Концентрацию выразим через полную массу и радиус звезды $nm=\frac{3\mathrm{M}}{4\pi R^3}$.

Равновесный радиус найдётся из условия минимума полной энергии[2]. Гравитационная

2 Возможно решение через приравнивание на поверхности звезды гравитационного давления и давления ферми-газа. Но оно по сути использует те же вычисления, предоставляя дополнительные возможности запутаться по пути.

энергия отрицательна, её вычисление аналогично вычислению электростатической энергии равномерно заряженного шара через теорему Гаусса (задача 3.43 из второй части задачника под ред. Овчинкина): $E_G = -\frac{3\mathrm{GM}^2}{5\mathrm{R}}$.

Теперь выразим полную кинетическую энергию через радиус звезды:

$$E_K = N \cdot 0.6 \mathrm{E}_F = \frac{M}{m} \cdot 0.6 \frac{p_F^2}{2\mathrm{m}} = 0.3 \frac{M}{m^2} \hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3} = 0.3 \frac{M}{m^2} \hbar^2 \left(\frac{9\pi M}{4\mathrm{mR}^3} \right)^{2/3} .$$

Минимизируем полную энергию:

$$E = -\frac{3}{5} G M^2 \frac{1}{R} + \frac{3}{10} \hbar^2 \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{M^{5/3}}{m^{8/3}} \frac{1}{R^2} ,$$

откуда

$$R = \frac{\hbar^2}{G M^{1/3} m^{8/3}} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \approx 8.4\, км .$$

Для проверки применимости нерелятивистского подхода вычислим скорость Ферми:

$$\frac{V_F}{c} = \frac{\hbar k_F}{m c} = \frac{\hbar \sqrt[3]{3\pi^2 n}}{m c} = \frac{\hbar}{mc} \frac{\sqrt[3]{\frac{9\pi}{4} \frac{M}{m}}}{R} \simeq \frac{1}{3} ,$$

т.е. релятивистские поправки ещё невелики.

Оценка энергии Ферми $E_F = \frac{m V_F^2}{2} \simeq \frac{1}{20} mc^2 = 50\, МэВ$ показывает, что система остаётся вырожденной при температуре $10^9 K$ (т. е. *всего* 100 кэВ).