Майнор
“Мир глазами физиков“
2017-2019

NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY

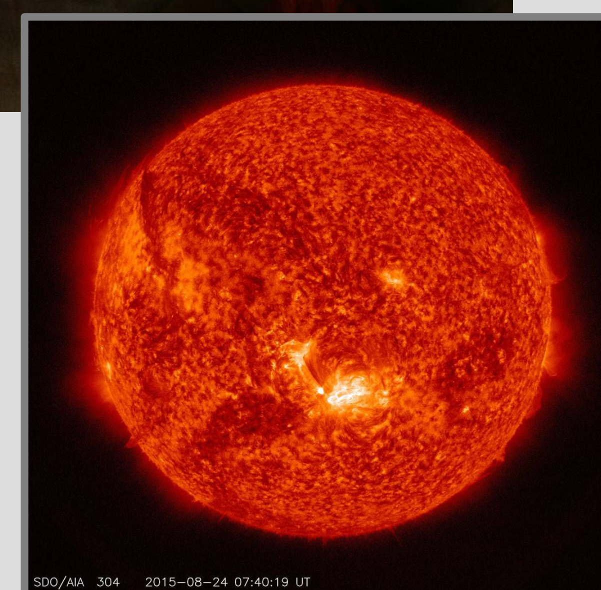
Осень 2017
Квантовая физика 'для чайников'

Лекция 3:
Излучение абсолютно чёрного тела

Задача об АЧТ

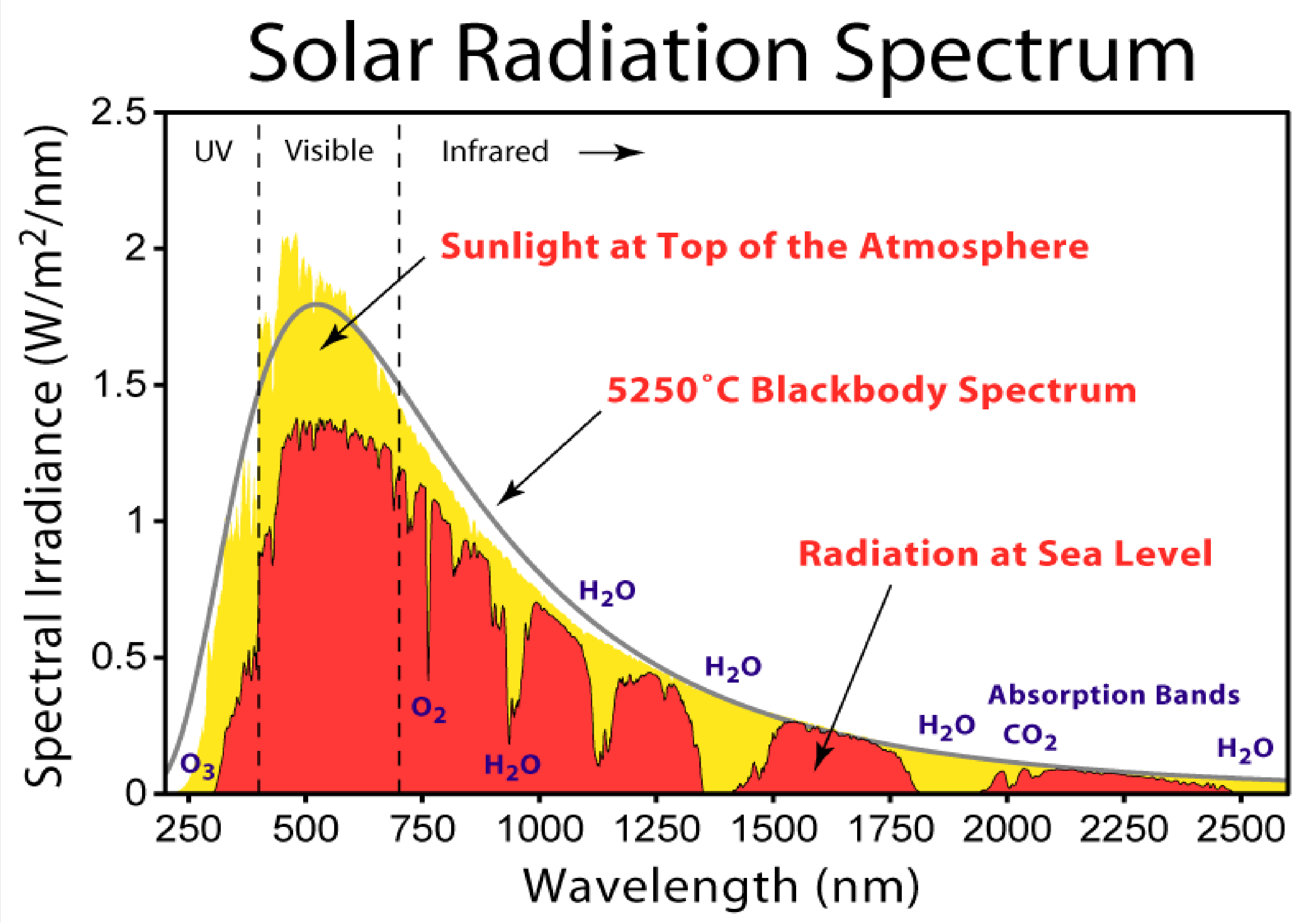
http://rustoria.ru/images/content/w1000/31/31e5429c01a5b298666
45eded7261e76?r=1428026174159094102З

https://www.photogorky.ru/photos/092506203c31b1feb489f71f1df9c615.jpg



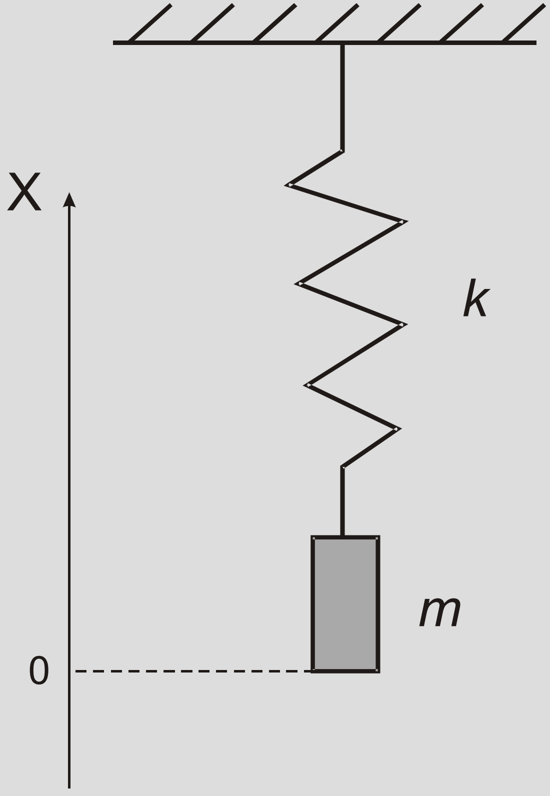
https://www.nasa.gov/image-feature/goddard/sun-releases-m56-class-solar-flare

Спектральная плотность излучения АЧТ



wikipedia.org: Solar Spectrum

Промежуточная задача 1: гармонический осциллятор



https://www.youtube.com/watch?v=z5VgYqKJ71w

$$x = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

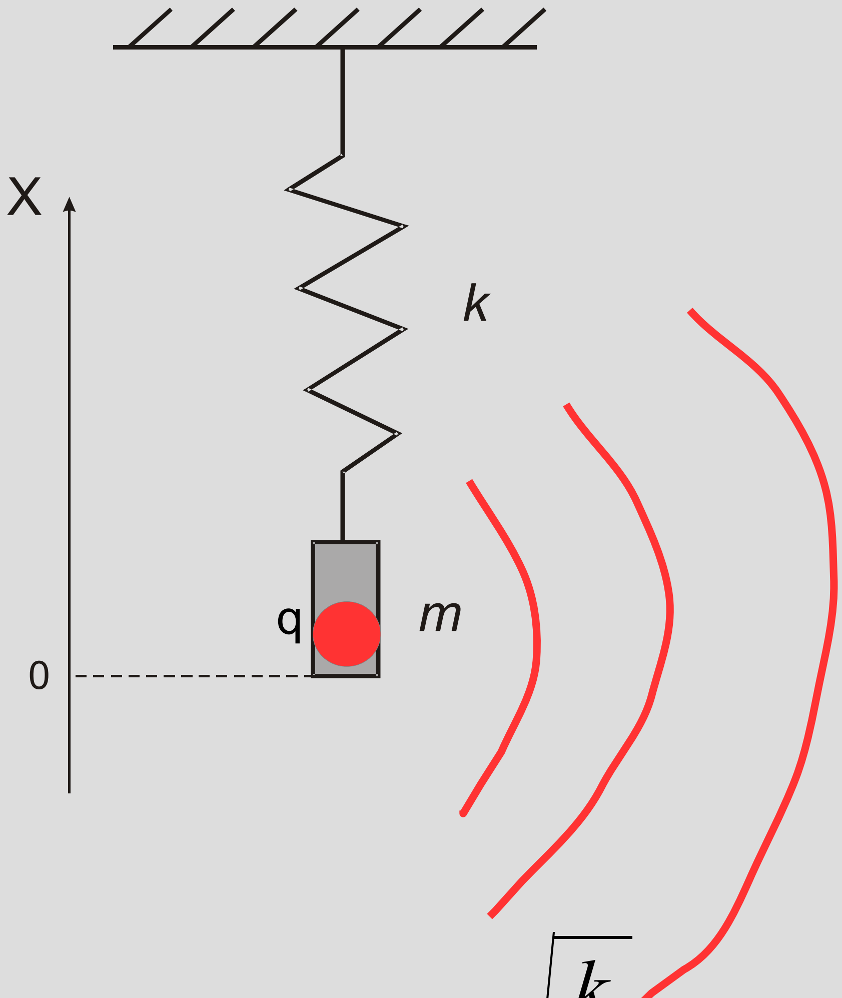
$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right) = 0$$

$$m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + kx\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Осциллятор+заряд=потери
Потери+гипотеза Планка = ?



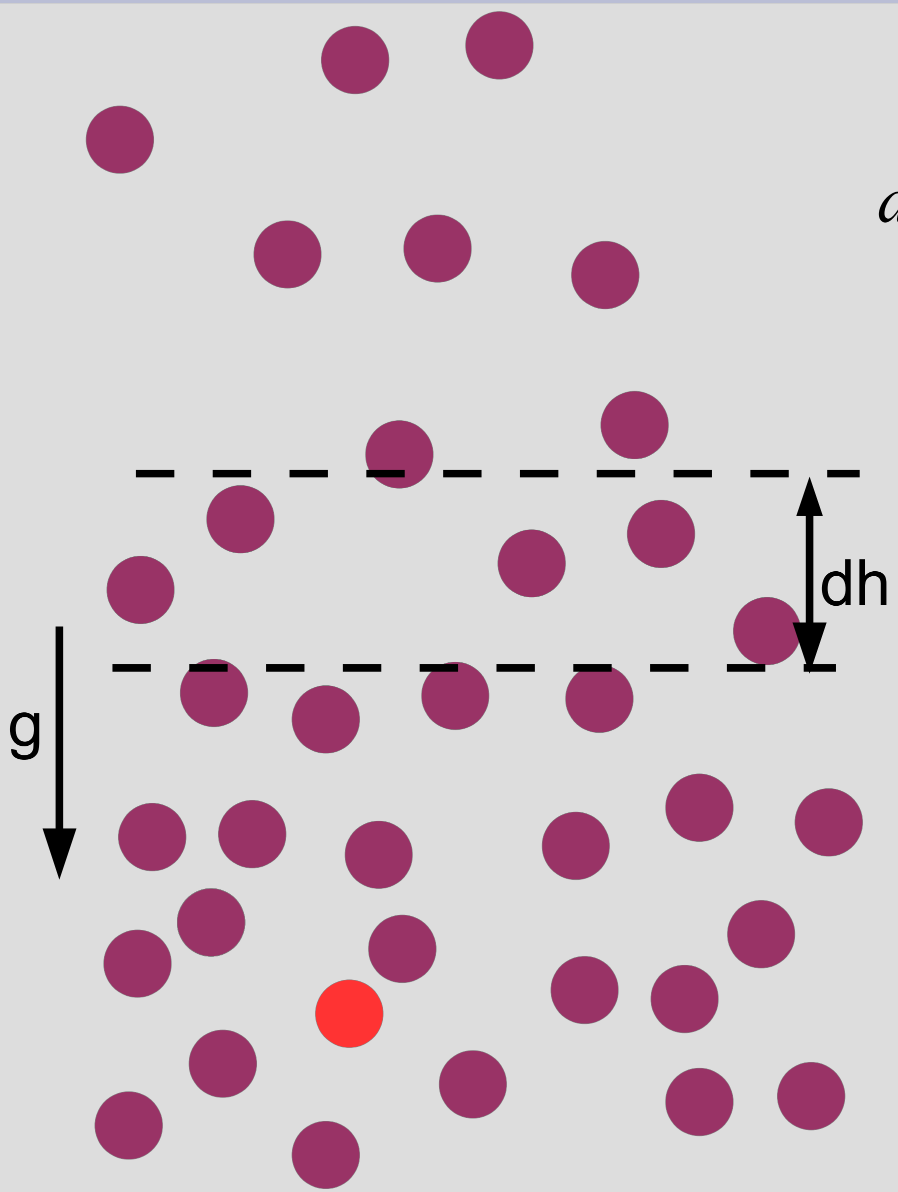
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E_n = n\hbar\omega_0 + E_0$$

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}$$

Энергия квантового осциллятора может принимать только дискретные значения!

Промежуточная задача 2: барометрическая формула



$$P = nkT$$

$$dP = -\rho g\, dh = -m n g\, dh = -\frac{m g}{kT} P\, dh$$

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{mg}{kT} P$$

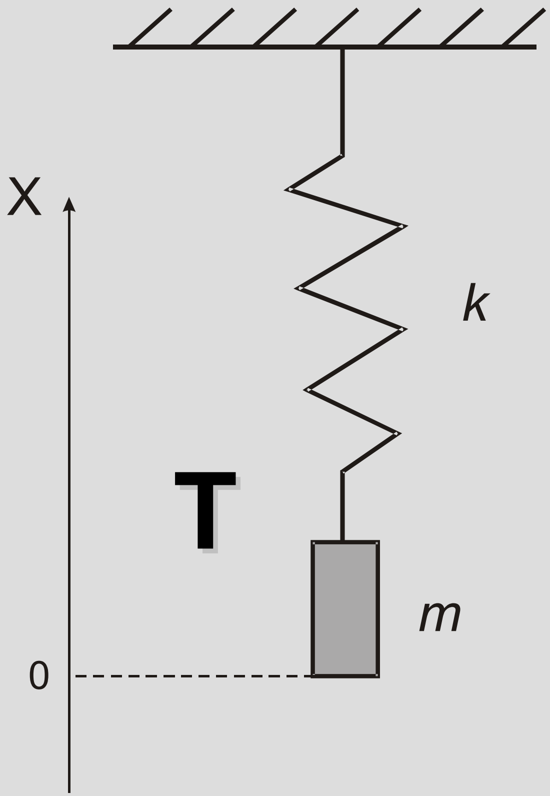
$$P = P_0 \exp\left(-\frac{mg}{kT}\right)$$

Распределение Больцмана

$$w = A e^{-U/(kT)}$$

вероятность обнаружить систему в состоянии с энергией U

Промежуточная задача 3: средняя энергия квантового осциллятора



$$E_n = n\hbar\omega_0 + \cancel{E_0}$$

выбор начала отсчёта энергии

$$w_n = A \cdot \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)$$

распределение Больцмана

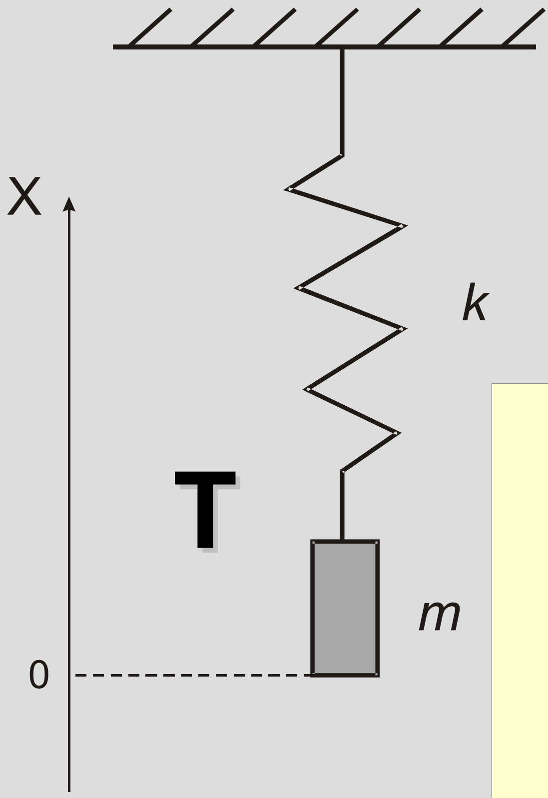
$$\sum w_n = 1$$

$$A\sum \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 n}{kT}\right) = 1$$

нормировка

сумма убывающей геометрической прогрессии

Промежуточная задача 3: средняя энергия квантового осциллятора



$$E_n = n\hbar\omega_0 + \cancel{E_0}$$

выбор начала отсчёта энергии

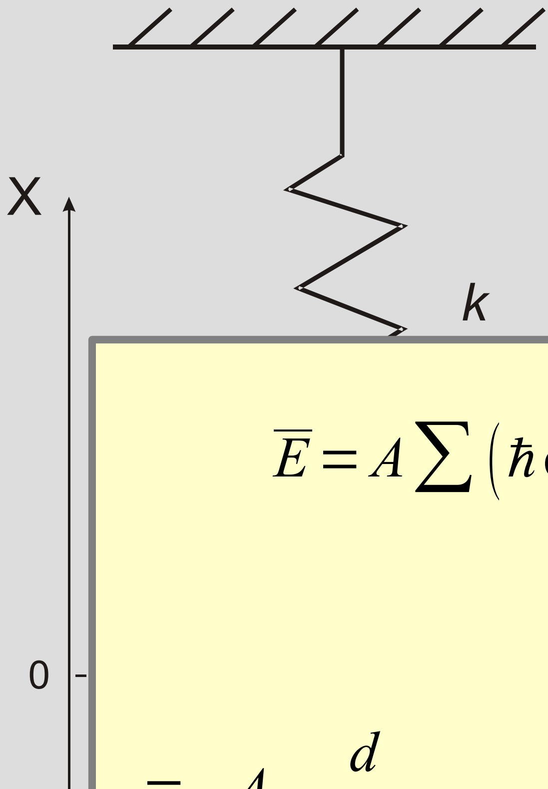
$$w_n = A \cdot \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)$$

распределение Больцмана

$$A \cdot \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)} = 1$$

$$A = 1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)$$

Промежуточная задача 3: средняя энергия квантового осциллятора



$$E_n = n\hbar\omega_0 + \cancel{E_0}$$

выбор начала отсчёта энергии

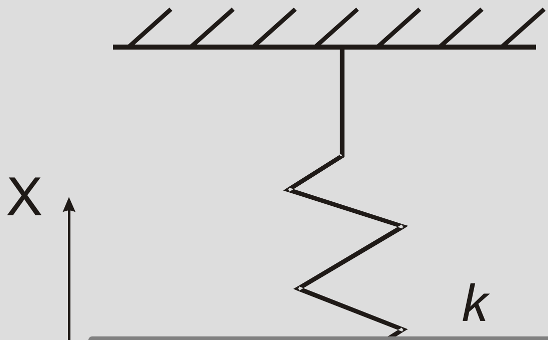
$$w_n = A\cdot\exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)$$

распределение Больцмана

$$\overline{E} = A\sum\left(\hbar\omega_0 n\right)\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 n}{kT}\right) = -A\frac{d}{d\left(\frac{1}{kT}\right)}\sum\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 n}{kT}\right) =$$

$$= -A\frac{d}{d\left(\frac{1}{kT}\right)}\frac{1}{1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)} = A\ \ \hbar\omega_0\ \frac{\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)}{\left(1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)\right)^2} = \frac{\hbar\omega_0}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)-1}$$

Промежуточная задача 3: средняя энергия квантового осциллятора



$$E_n = n\hbar\omega_0 + \cancel{E_0}$$

выбор начала отсчёта энергии

$$w_n = A\cdot\exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)$$

распределение Больцмана

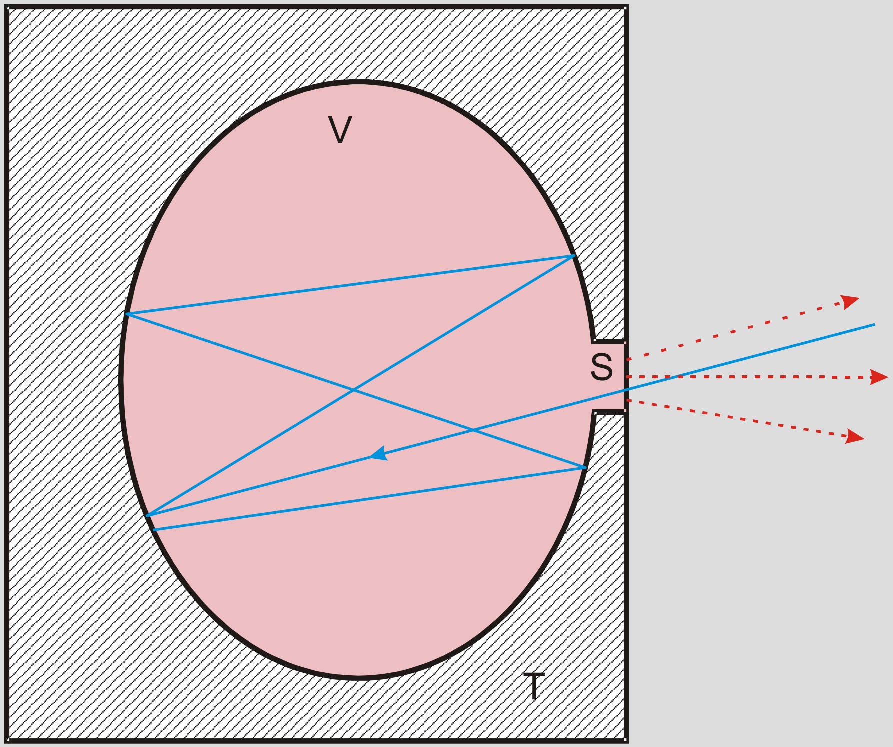
$$\overline{E} = A\sum\left(\hbar\omega_0 n\right)\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 n}{kT}\right) = -A\frac{d}{d\left(\frac{1}{kT}\right)}\sum\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 n}{kT}\right) =$$

$$= -A\frac{d}{d\left(\frac{1}{kT}\right)}\frac{}{1-\exp\ldots} \ldots = \frac{\hbar\omega_0}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)-1}$$

Средняя энергия осциллятора, находящегося в тепловом равновесии с термостатом при температуре T

$$\overline{E} = \frac{\hbar\omega_0}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)-1}$$

Модель АЧТ



Удобная модель АЧТ:

- Всякое падающее в отверстие извне излучение поглощается
- Внутри полости есть излучение, находящееся в тепловом равновесии со стенками при температуре T
- Это равновесное излучение “высвечивается” в отверстие

Стоячие волны

https://www.youtube.com/watch?v=no7ZPPqtZEg

Условие формирования стоячей волны: целое число полуволн укладывается на длине струны.

$$N\frac{\lambda}{2}=L$$

http://www.pngpix.com/download/tag/microwave-oven

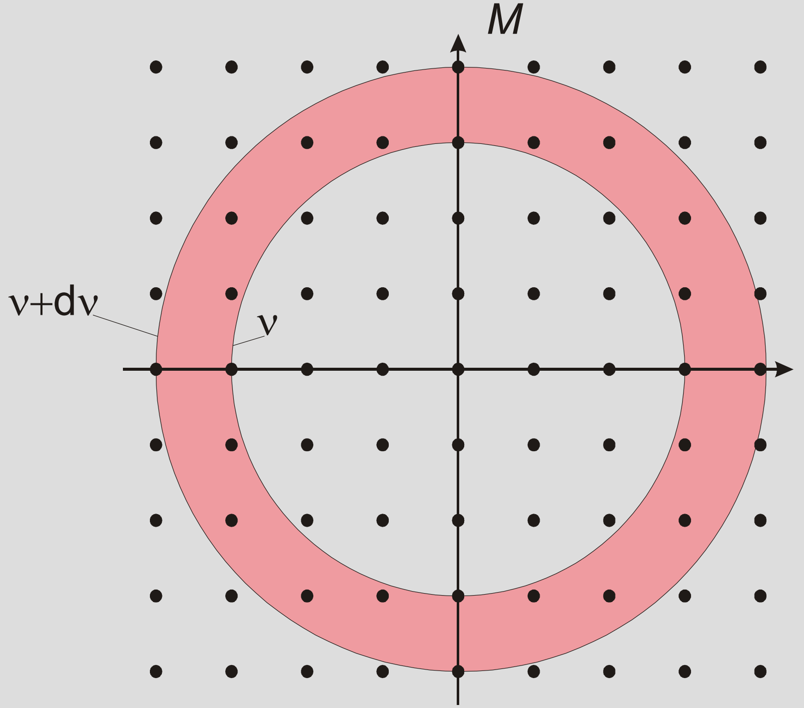
Полость микроволновки – трёхмерный резонатор для электромагнитных волн.

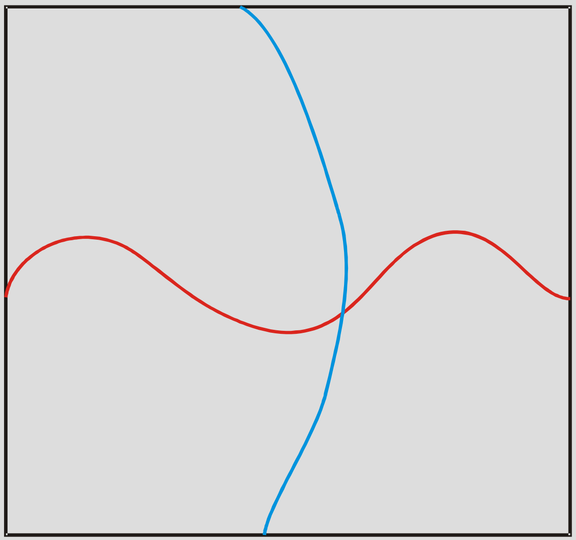
Частоты прямоугольного резонатора

$$N\frac{\lambda_x}{2}=L_x;\ M\frac{\lambda_y}{2}=L_y;\ P\frac{\lambda_z}{2}=L_z$$

$$N,M,P\geq 0$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_x}\right)^2+\left(\frac{1}{\lambda_y}\right)^2+\left(\frac{1}{\lambda_z}\right)^2=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\left(\frac{c}{\nu}\right)^2$$





$$N^2+M^2+P^2=4L^2\left(\frac{\nu}{c}\right)^2$$

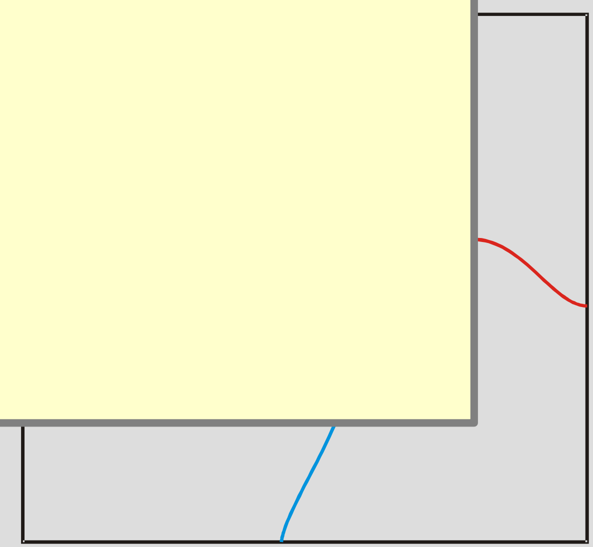
Частоты прямоугольного

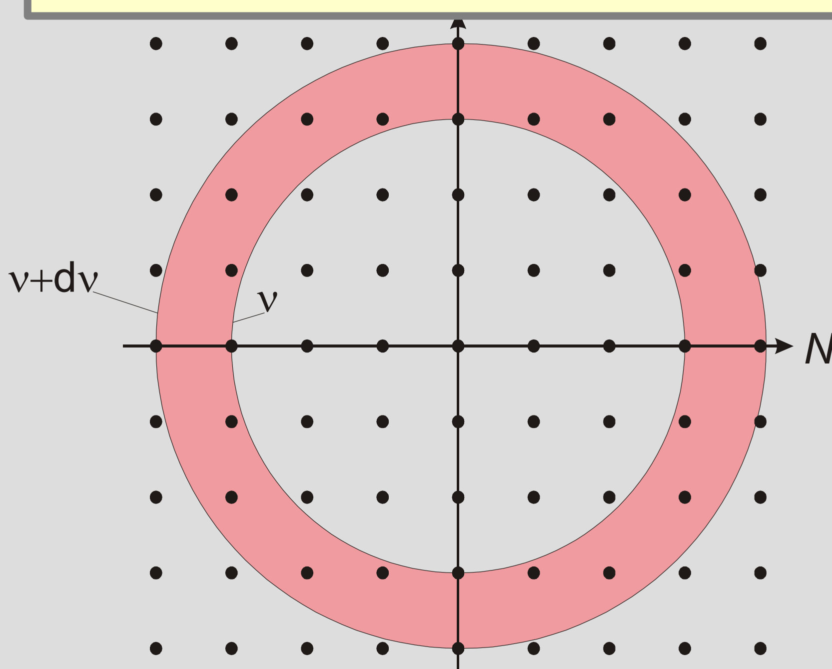
при изменении частоты на $d\,\nu$

в 1/8 сферического слоя попадёт чисто точек

$$dN = \frac{1}{8} 4\pi R^2 dR / 1 = A \nu^2 d\nu$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_x}\right)$$

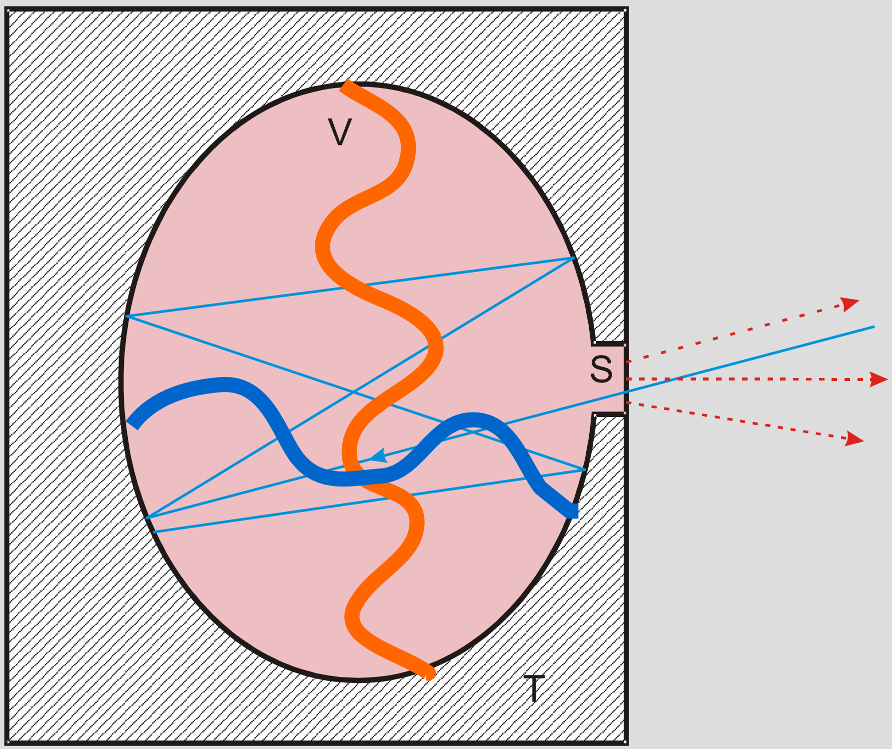




$$N^2 + M^2 + P^2 = 4L^2 \left(\frac{\nu}{c}\right)^2$$

уравнение сферы радиуса $R = 2L\frac{\nu}{c}$

Плотность энергии равновесного излучения в полости



Энергия, запасённая в каждой стоячей волне изменяется квантами. Средняя энергия !<u>аналогично задаче об осцилляторе!</u>

$$\overline{E} = \frac{\hbar\omega_0}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right) - 1}$$

Число типов стоячих волн в интервале частот:

$$dN = \frac{1}{8} 4\pi R^2 dR / 1 = A\nu^2 d\nu$$

Спектральная плотность энергии

$$\frac{dE}{d\nu} = B \frac{h\nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

Законы теплового излучения

$$\frac{dE}{d\nu} = B\frac{h\nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}$$

Классический закон Рэлея-Джинса

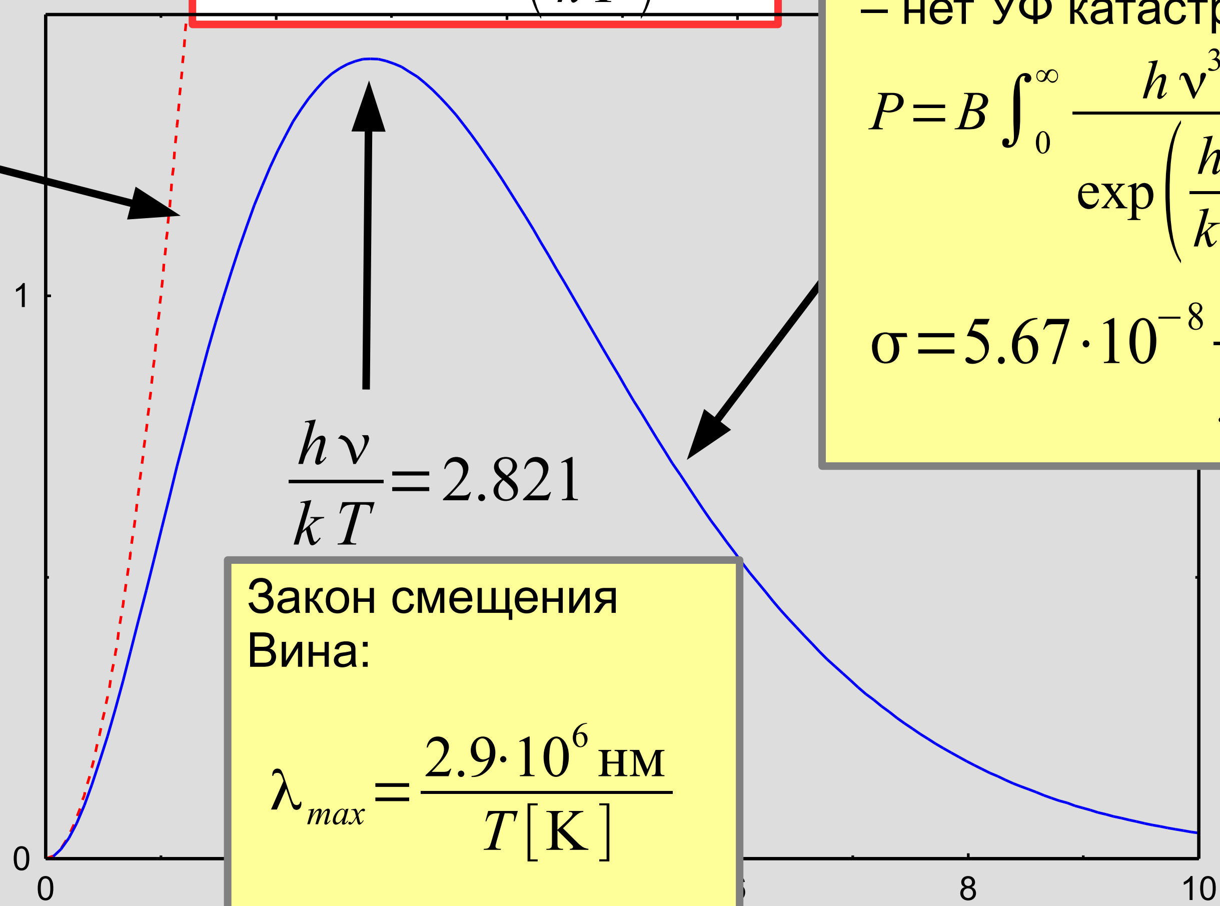
$$h\nu \ll kT$$

$$\rho \propto \frac{\nu^2}{kT}$$

Закон Стефана-Больцмана: (экспоненциально спадает – нет УФ катастрофы)

$$P = B\int_0^\infty \frac{h\nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1} = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5.67\cdot 10^{-8}\frac{Вт}{м^2\cdot K^4}$$



$$\frac{h\nu}{kT} = 2.821$$

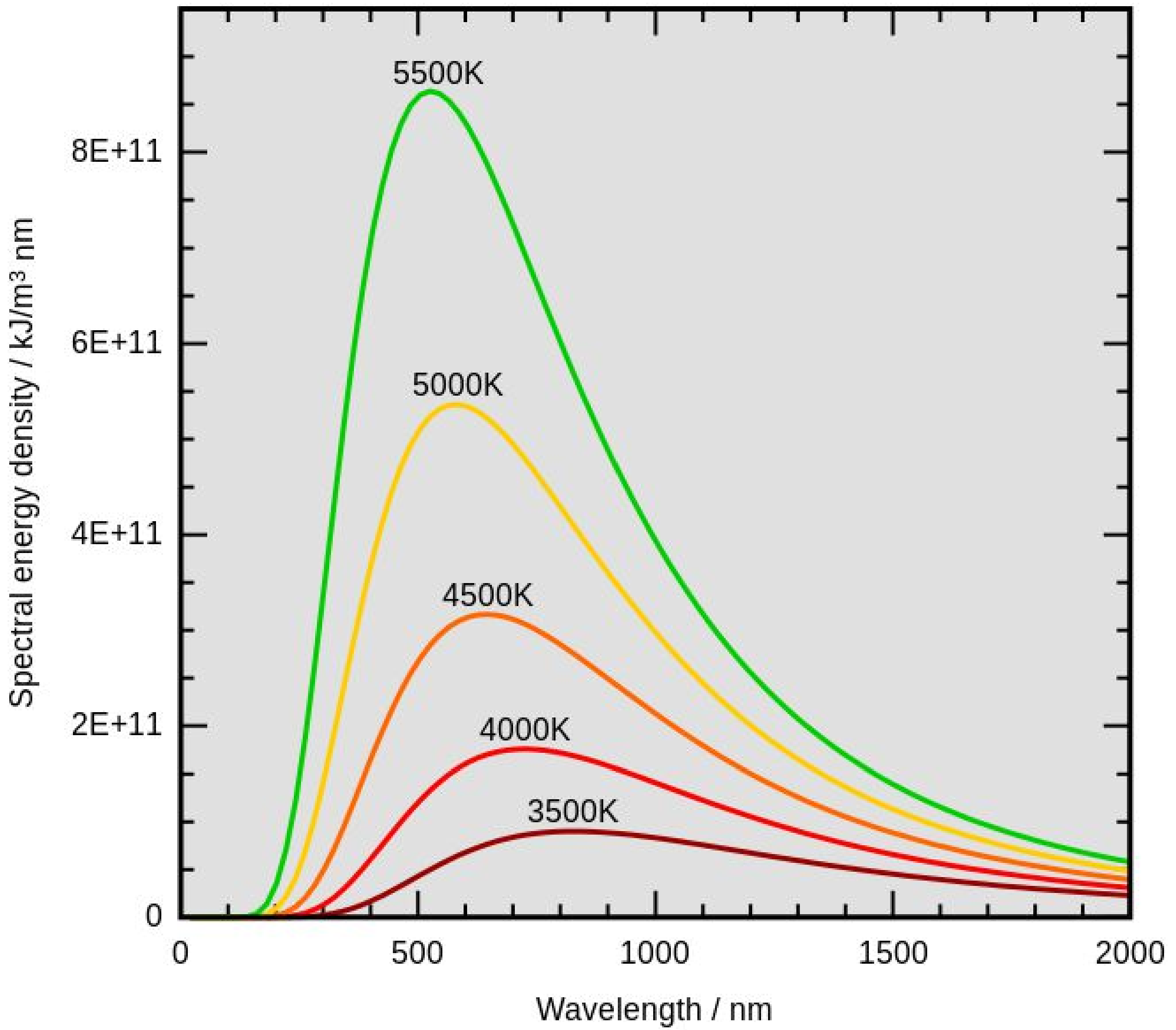
Закон смещения Вина:

$$\lambda_{max} = \frac{2.9\cdot 10^6\,\text{нм}}{T[\text{K}]}$$

300 К: 10 мкм
1000К: 3 мкм
6000К: 500 нм

Применения

https://en.wikipedia.org/wiki/Wien%27s_displacement_law#/media/File:Wiens_law.svg

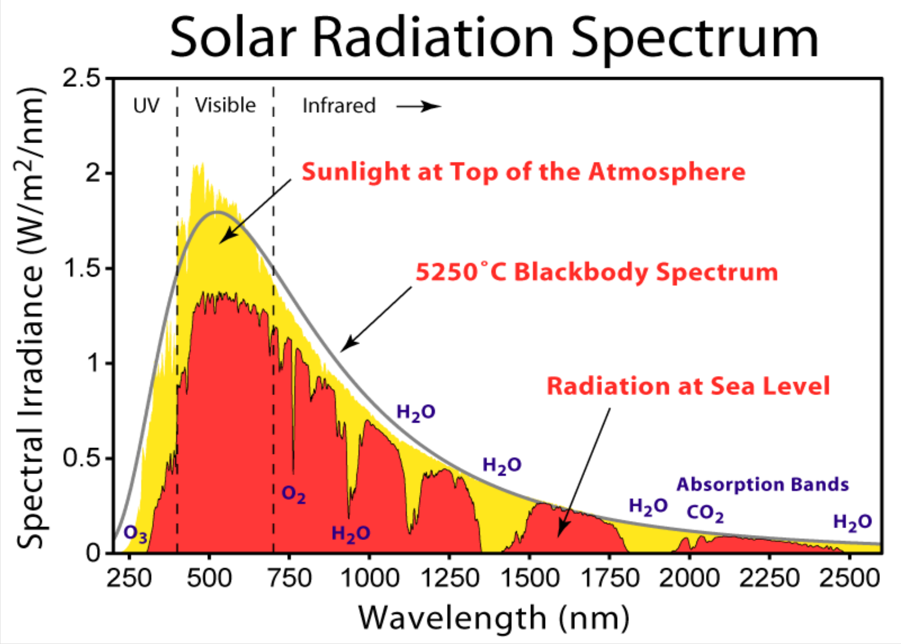


Пирометрия: бесконтактное измерение температуры по спектру и интенсивности

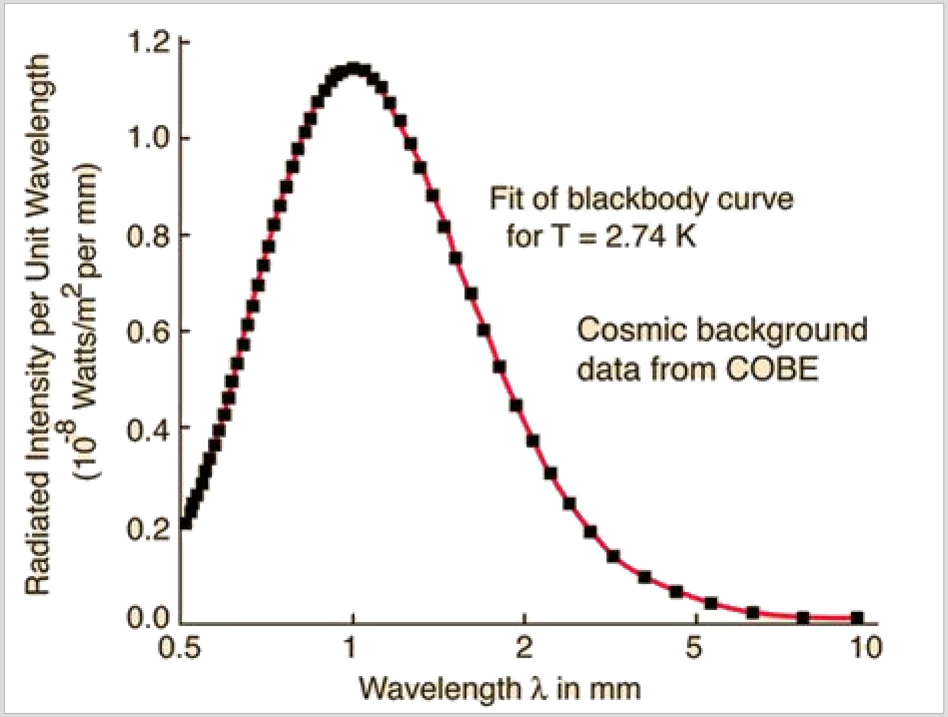
Термос

Идеально зеркальная поверхность не поглощает – **<u>и не излучает!</u>**

Спектры в астрономии



wikipedia.org:
Solar Spectrum



(источник: Hyperphysics Project)

Последствия гипотезы Планка для классической физики

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

2-й закон Ньютона

$$E = E\left(\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\}\right) = K\left(\{\vec{p}_i\}\right) + \Pi\left(\{\vec{r}_i\}\right)$$

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial \Pi\left(\{\vec{r}_i\}\right)}{\partial \vec{r}_i}$$

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = -\frac{\partial E\left(\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\}\right)}{\partial \vec{r}_i}$$

$$K\left(\{\vec{p}_i\}\right) = \sum \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2\mathrm{m}}$$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{V}_i = \frac{\partial K\left(\{\vec{p}_i\}\right)}{\partial \vec{p}_i} = \frac{\partial E\left(\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\}\right)}{\partial \vec{p}_i}$$

Уравнения Гамильтона – эквивалентная ньютоновской форма записи уравнений классической механики

Последствия гипотезы Планка для классической физики

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

2-й закон Ньютона

Уравнения Гамильтона подразумевают дифференцируемость и следовательно непрерывнось энергии, а по гипотезе Планка энергия меняется дискретно! Гипотеза Планка не может быть включена в рамки классической теории.

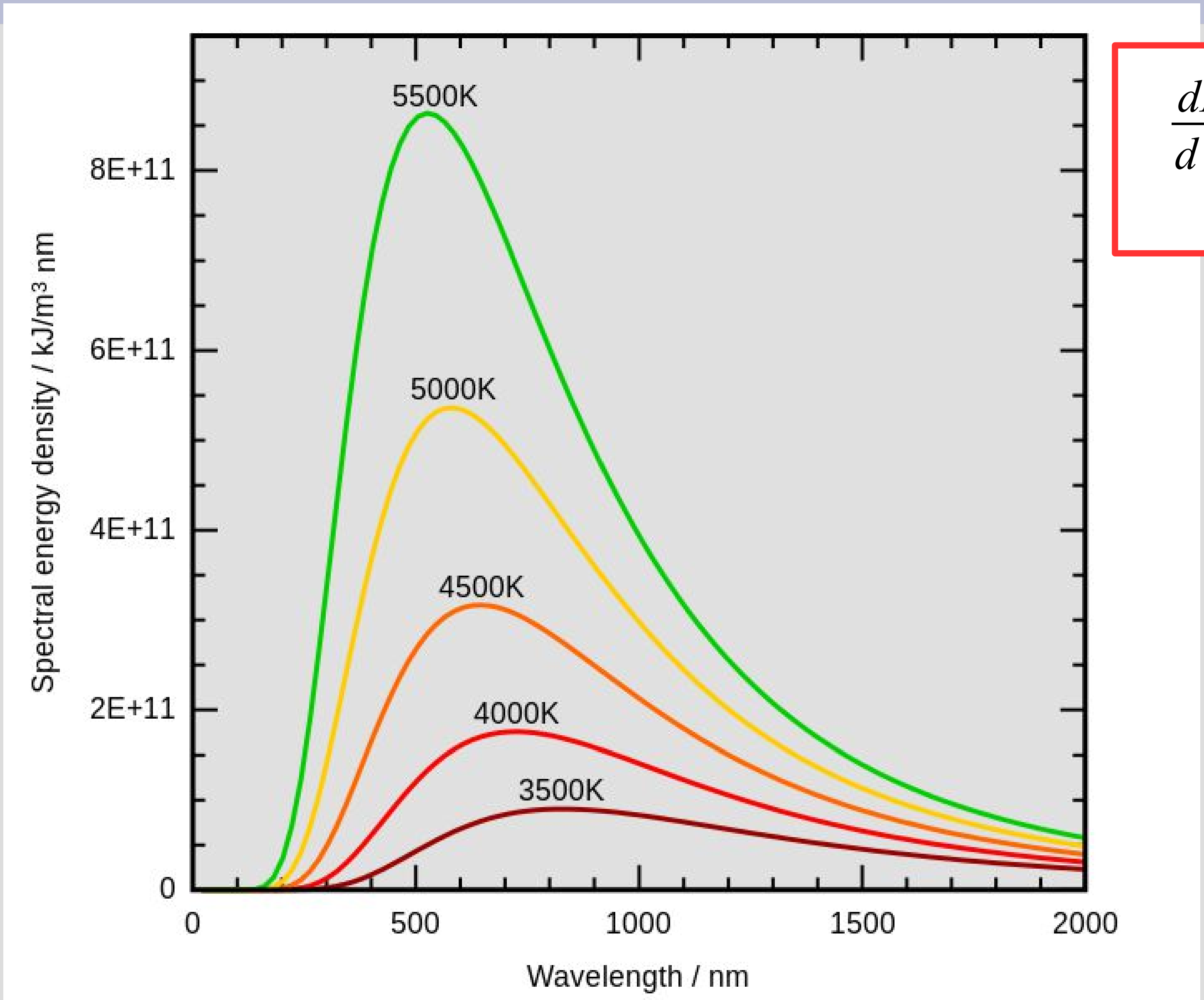
$$\vec{F}_i = -$$

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = -\frac{\partial E(\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\})}{\partial \vec{r}_i}$$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{V}_i = \frac{\partial K(\{\vec{p}_i\})}{\partial \vec{p}_i} = \frac{\partial E(\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\})}{\partial \vec{p}_i}$$

Уравнения Гамильтона – эквивалентная ньютоновской форма записи уравнений классической механики

Выводы



$$\frac{dE}{d\nu} = B\frac{h\nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

Задачи домашнего задания

Задача 1

Известно, что мощность солнечного излучения при входе в атмосферу Земли составляет примерно 1400 Вт/м^2. Из эйнштейновской эквивалентности массы и энергии, оцените скорость уменьшения массы (“худения”) Солнца. Расстояние от Солнца до Земли принять равным 150 млн. км.

Задача 2

Шар с зачерненной поверхностью находится в космическом пространстве на некотором расстоянии r от Солнца. Найти равновесную температуру шара, если он находится от Солнца на расстояниях, равных радиусам орбит Венеры, Земли, Марса и Юпитера, равных (в млн. км) $r_в=108$, $r_з=150$, $r_м=228$, $r_ю=780$. Солнце считать источником равновесного теплового излучения с температурой $T_C=6000$ К и радиусом $R_C=7100$ км. Считать, что вся поверхность шара имеет одинаковую температуру.

Сравнить полученные величины со средними температурами освещенной части поверхностей планет Венеры, Земли, Марса и Юпитера: $T_В=735\,K$, $T_З=275\,K$, $T_М=235\,K$, $T_Ю=135\,K$. Чем можно объяснить большое расхождение рассчитанной таким образом и полученной в измерениях температуры поверхности Венеры?