

Задачи домашнего задания к лекции №4.

Задача 1.

До какой скорости необходимо разогнать протон и электрон, чтобы их дебройлевская длина волны стала равной 10^{-14} м. (Это примерно 10 размеров ядра)

Для справки: энергия релятивистской частицы $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$.

Решение:

Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{p}$. Тогда для классической частицы: $\lambda = \frac{h}{mv}$, а для

релятивистской: $\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{h}{mc} \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$.

При вычислении по классической формуле:

$$v = \frac{h}{m\lambda}; v_{эл} = 7 \cdot 10^{11} \text{ м/с} = 233 c; v_{пр} = 3.97 \cdot 10^7 \text{ м/с} = 0.132 c.$$

Видно, что протон получается «медленный», а вот для электрона ответ бессмысленен — нужно использовать релятивистскую формулу.

Окончательно: $v = c \sqrt{1 - (\frac{mc\lambda}{h})^2}; v_{эл} = 0.998 c;$

Ответ: скорость электрона 0.998с скорость протона 0.132с.

Задача 2.

Оценить, чему был бы равен размер атома водорода в случае, если бы вместо кулоновских сил на ядро и электрон действовала бы только сила гравитационного взаимодействия.

Для справки: размер видимой части Вселенной 46 миллиардов световых лет, т.е. примерно $5 \cdot 10^{26}$ м.

Решение

В рамках боровского приближения:

$$G \frac{m_e m_p}{r^2} = m_e \frac{V^2}{r} \quad \text{- закон взаимодействия частиц}$$

$$2\pi r = \lambda = \frac{h}{p} \quad \text{- боровское правило квантования}$$

$$\text{Выразим } m_e \frac{V^2}{r} = \frac{(m_e V)^2}{m_e r} = \frac{p^2}{m_e r} = \frac{h^2}{4\pi^2 m_e r^3}$$

Подставим это в первое уравнение: $G \frac{m_e m_p}{r^2} = \frac{h^2}{4\pi^2 r^3 m_e}$, и выразим из этого радиус:

$$r = \frac{h^2}{4\pi^2 G m_p m_e^2} \approx 1.8 \cdot 10^{33} \text{ м}.$$

Полученный размер астрономически огромен, этот пример иллюстрирует незначительность сил гравитации в микромире.