

Решения задач к лекции 8

Задача 1.

В одномерную потенциальную яму шириной $a=3\text{Å}$ помещено 6 ферми-частиц со спином $S=1/2$. Какова минимальная энергия всех частиц в яме? Какую минимальную порцию энергии надо сообщить для перевода системы в возбужденное состояние?

Комментарий: В задаче для получения численного ответа не хватает массы — подразумевались электроны.

Решение.

Уровни энергии в одномерной потенциальной яме $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2 m a^2}, n=1,2,\dots$. Характерный

масштаб энергии $E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2 m a^2} \simeq 5 \times 10^{-19} \text{ Дж} \simeq 3 \text{ эВ}$.

С учётом вырождения по проекции спина и принципа Паули, на каждый уровень можно пометить две частицы. Шесть ферми-частиц занимают три первых уровня.

Их полная энергия

$$E = 2 E_0 + 2 \times 4 E_0 + 2 \times 9 E_0 = 28 E_0 = 84 \text{ эВ}$$

Для перевода системы в возбужденное состояние (затратив при этом минимальную энергию) необходимо перевести одну частицу с третьего на четвертый уровень. Для этого необходимо затратить энергию:

$$\Delta E = E_0(4^2 - 3^2) = 7 E_0 = 21 \text{ эВ}.$$

Задача 2.

Найти рабочую частоту ЯМР томографа, магнитное поле в котором равно 3 Тл. Используется ЯМР на протонах (на ядрах атомов водорода), магнитный момент протона равен

$$\mu_p = 14 \times 10^{-27} \text{ Дж/Тл}.$$

Решение.

Спин протона равен $1/2$, поэтому возможно всего две ориентации его магнитного момента: вдоль поля и против поля. Для резонансного поглощения энергия излучения должна быть равна разности энергий состояний спина “по полю” и “против поля”. Тогда уравнение на частоту излучения имеет вид: $h\nu = 2\mu_p B$

Откуда $\nu = 12,74 \cdot 10^7 \text{ Гц} = 127,4 \text{ МГц}$.