



NATIONAL RESEARCH
UNIVERSITY

Майнор "Мир глазами физиков" 2017-2019

Осень 2017

Квантовая физика 'для чайников'

Лекция 8:

Неразличимость частиц.

Орбитальный момент и спин.

Волновые функции неразличимых частиц

$$\Psi_{ab}^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) \pm \psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1)$$

Для данного типа частиц все состояния должны иметь чётность к перестановке одного типа — иначе из чётного и нечётного состояний можно было бы сделать смешанное состояние, которое ни чётное, ни нечётное. То есть, эта чётность связана с природой конкретной частицы и является неизменным свойством частицы

Вариант со знаком «минус» запрещает частицам пребывать в одном состоянии: при). Поэтому для ферми-частиц волновая функция пары частиц нечётная по перестановке, а для бозе-частиц — чётная.

Момент импульса в механике

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Сохраняющаяся величина в замкнутой системе

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Закон сохранения момента импульса... знаком с детства



https://www.youtube.com/watch?v=_EZiw_a8B5A

Более “взрослый” пример



<https://www.youtube.com/watch?v=7hN67r90xE8>

Немного механики

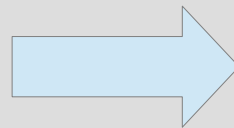
При вращении вокруг оси

$$L = \sum_i r_i p_i = \sum_i r_i m_i V_i = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega$$

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{момент инерции}$$

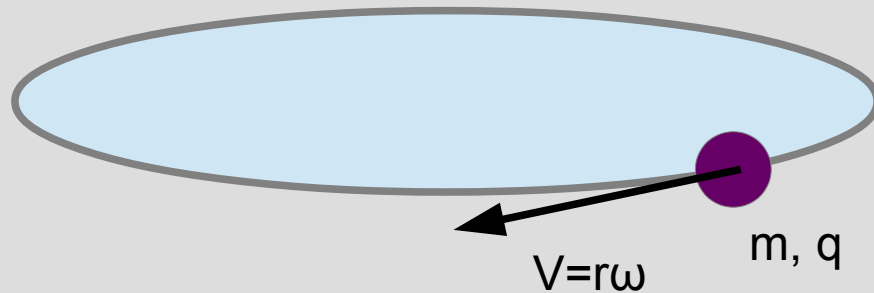
$$\frac{d \vec{p}_i}{d t} = \vec{F}_i$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \frac{d \vec{p}_i}{d t} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$



$$\frac{d \vec{L}}{d t} = \vec{T}$$

Гиромагнитное отношение



$$L = m \omega r^2$$

$$M = I S = q \frac{\omega}{2\pi} \pi r^2 = q \omega r^2 / 2$$

$$\gamma_0 = \frac{M}{L} = \frac{1}{2} \frac{q}{m}$$

Не зависит от траектории!

Специфика момента импульса в квантовой физике

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L_x = y p_z - p_y z$$

Но все компоненты импульса и координаты нельзя одновременно измерить!!!

- Длина вектора (под «длиной» имеется в виду максимально возможная проекция на заданное направление) момента импульса составляет целое или полуцелое число нормированных констант Планка \hbar .
- Если длина вектора момента импульса равна $N \hbar$, то проекция момента импульса на произвольное направление может принимать одно из следующих $(2N+1)$ значений: $L_z = \{-N \hbar, (-N+1) \hbar, \dots, (N-1) \hbar, N \hbar\}$.
- Если длина вектора момента импульса равна $N \hbar$, то среднее значение квадрата момента импульса $L^2 = \hbar^2 N(N+1)$ (при этом получается, что $\sqrt{L^2} > \max L_z$!)

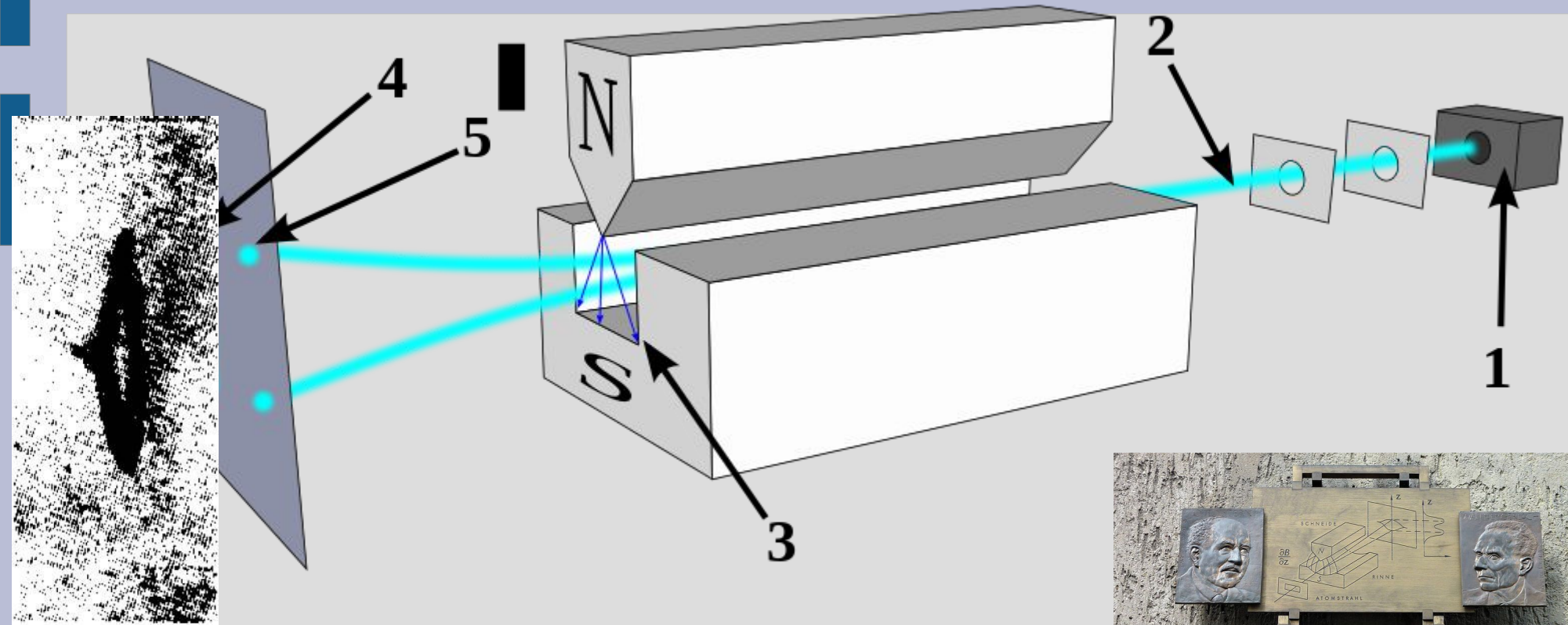
Квантование проекции магнитного момента и возможности измерения

$$\mu_z = g \mu_B j_z$$

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_e} = 0.92 \times 10^{-23} \text{ Дж/Тл} \quad \text{магнетон Бора}$$

1. Если магнитный момент $\vec{\mu}$ помещён в магнитное поле \vec{B} , то энергия, связанная с ориентацией этого момента (с поворотом «стрелки компаса») равна $E = -(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$.
2. Если магнитный момент $\vec{\mu}$ направлен вдоль силовых линий магнитного поля, но находится в неоднородном магнитном поле, то возникает сила «втягивающая» магнитный момент в сильное поле, равная $F = \mu_z \frac{dB}{dz}$.

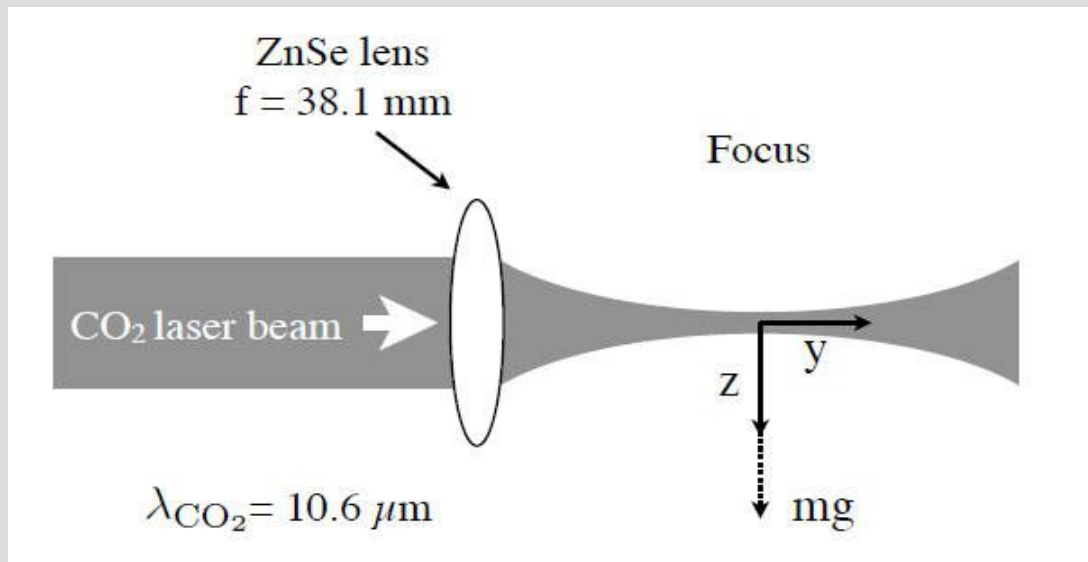
Опыт Штерна-Герлаха



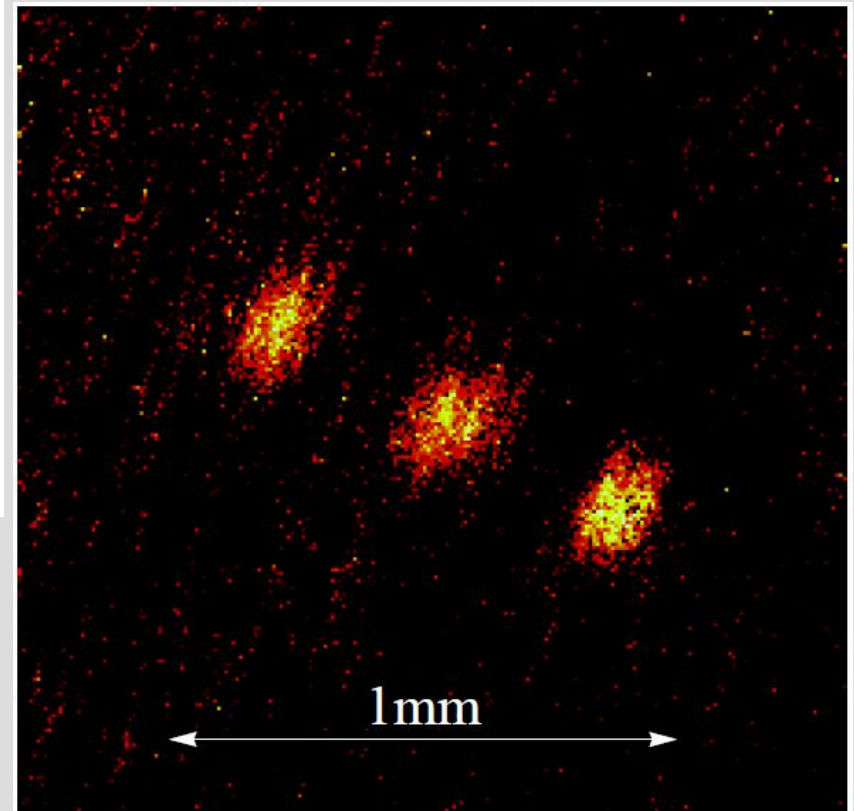
Штерн, 1943

https://en.wikipedia.org/wiki/Stern-Gerlach_experiment; [https://de.wikipedia.org/wiki/Otto_Stern_\(Physiker\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Otto_Stern_(Physiker)); https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1943/stern-lecture.html

Опыт типа опыта Штерна-Герлаха с ультрахолодными атомами

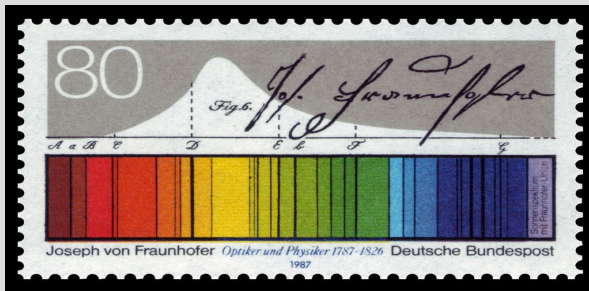


Рубидий-87: нечётное число нуклонов в ядре, спин $1/2$ – полный момент $1 \Rightarrow$ бозон



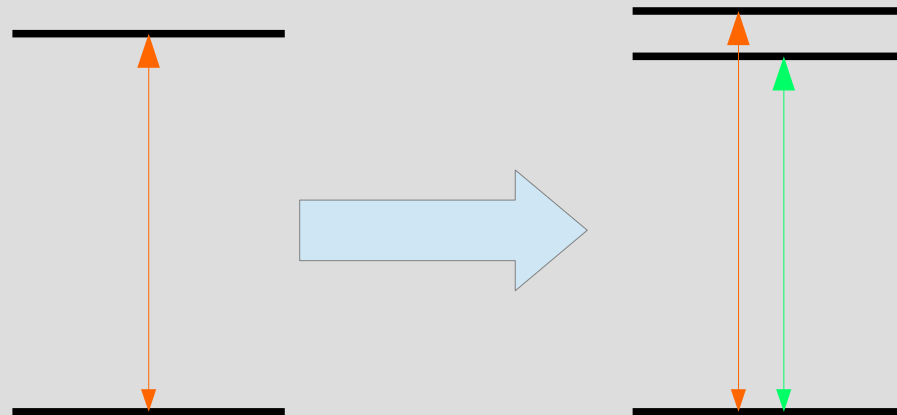
Результат опыта типа опыта Штерна-Герлаха с "каплей" ультрахолодных атомов рубидия-87. Фото сделано через 10 мс после начала падения (выключения ловушки).

Эффект Зеемана.



$$\mu_z = g \mu_B j_z$$
$$E = -(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

расщепление
уровней энергии в
магнитном поле

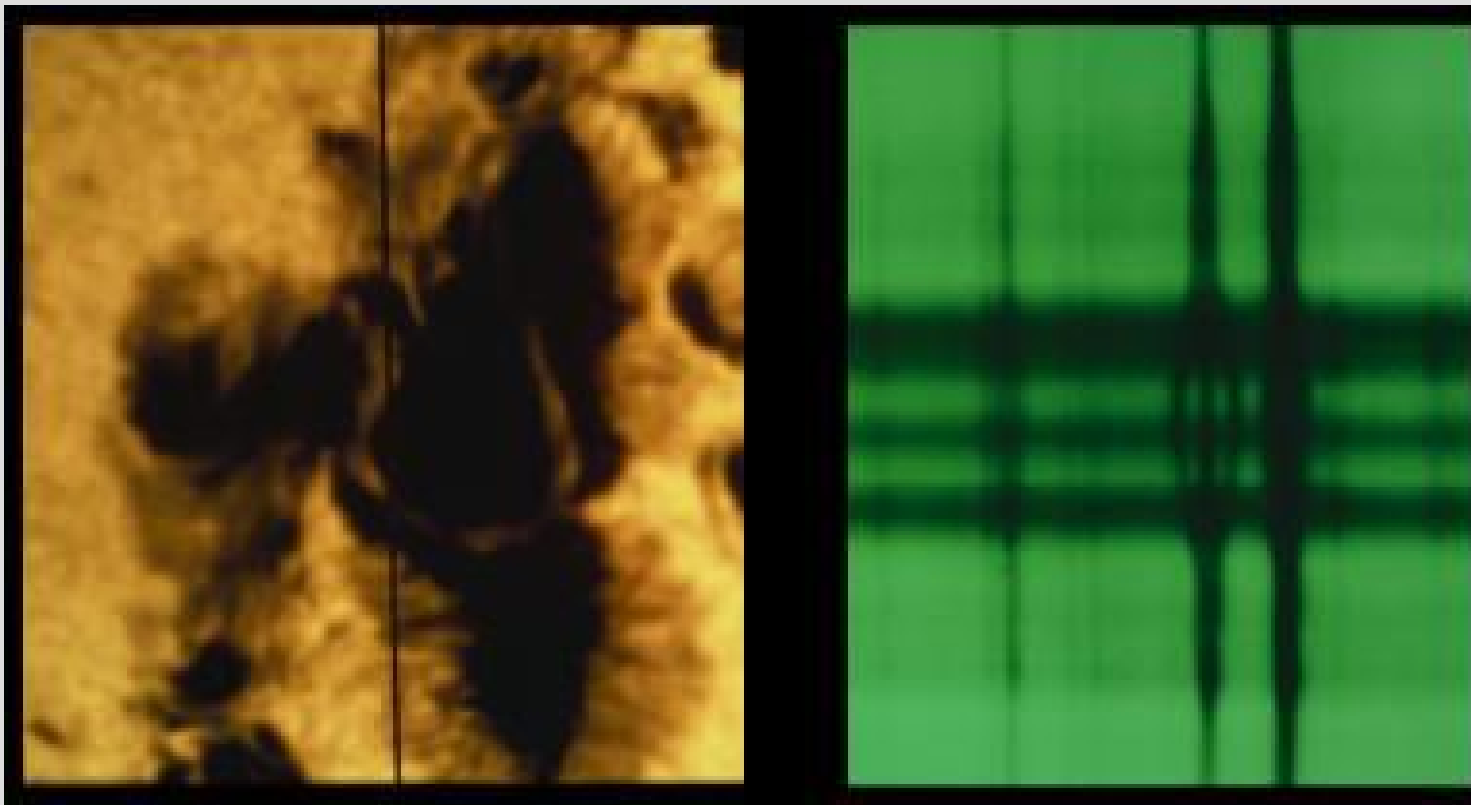


расщепление
спектральных линий



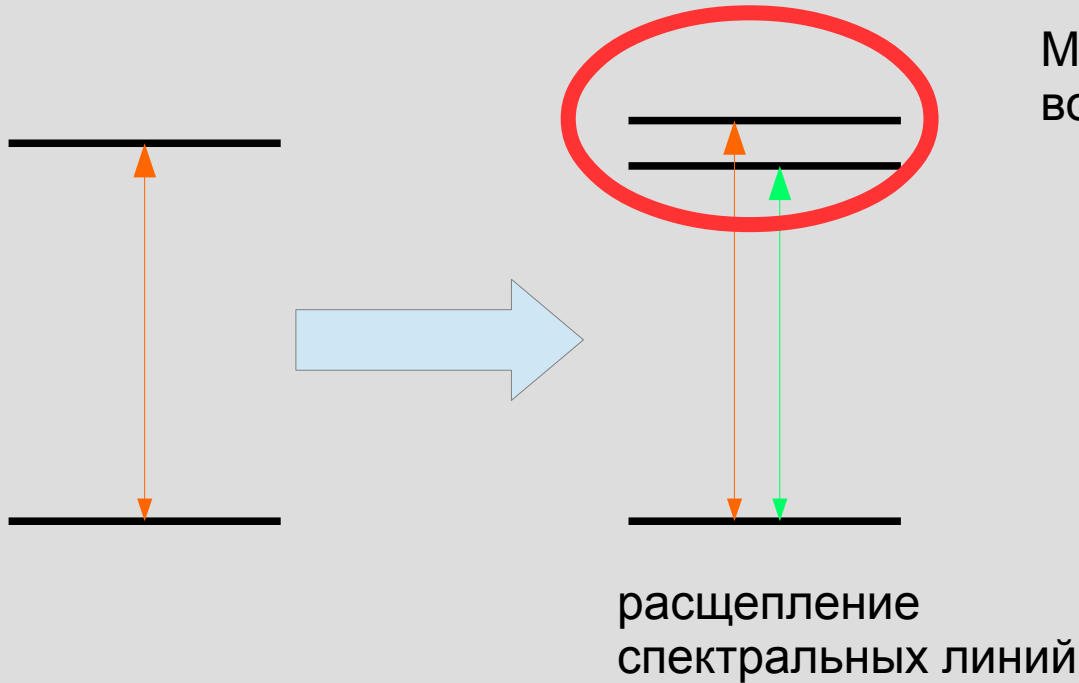
Зееман, 1902

Эффект Зеемана на Солнце



Поле в солнечном пятне примерно 0.4 Тл

ЯМР, ЭПР



Между этими уровнями тоже возможен резонансный переход!

В поле 1 Тл:
ЭПР – десятки гигагерц,
сантиметровый СВЧ-
диапазон

ЯМР – десятки мегагерц,
радиочастотный
диапазон

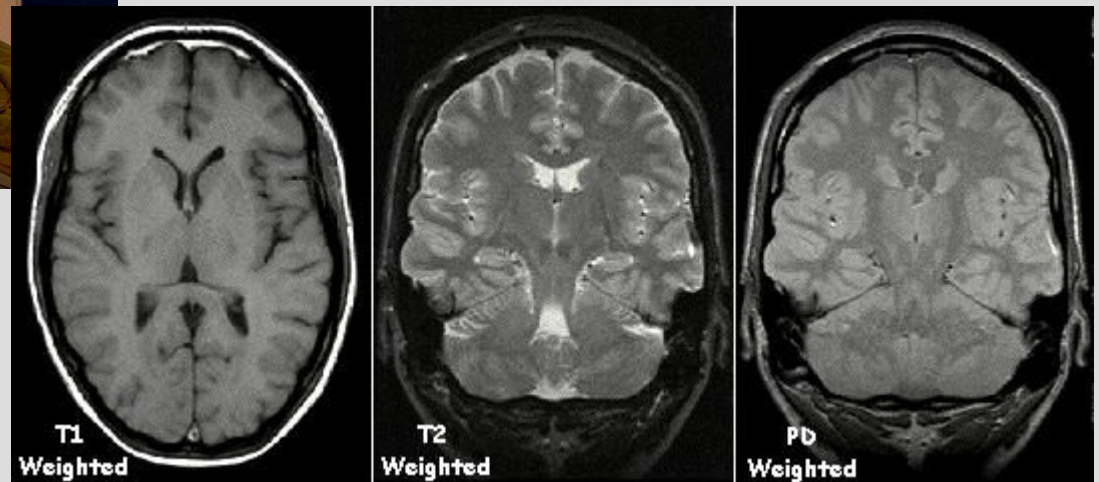


Раби, 1944

ЯМР-томография



Слева: Современный ЯМР-томограф с полем до 3 Тл. Справа: примеры ЯМР-томограмм мозга с разной обработкой сигнала.



Задачи домашнего задания

Задача 1.

В одномерную потенциальную яму с очень высокими стенками помещено 6 ферми-частиц со спином $S=1/2$. Ширина ямы $a=3\text{\AA}$, частицы друг с другом не взаимодействуют. Какова минимальная полная энергия всех частиц в этой яме. Какую минимальную порцию энергии надо сообщить для перевода системы в первое возбужденное состояние?

Задача 2.

Найти рабочую частоту ЯМР- томографа, магнитное поле в котором равно 3 Тл. Используется ЯМР на протонах (на ядрах атомов водорода), магнитный момент протона равен $\mu_p=14\times 10^{-27}\text{ Дж/Тл}$.