

Решение домашнего задания к лекции №11

Задача 1

Электрону энергетически невыгодно находиться рядом с атомами гелия, поэтому оказавшись в толще жидкого гелия, электрон образует вокруг себя пустой пузырек (“баблон”). Оценить радиус такого пузырька исходя из соотношения неопределенности. Коэффициент поверхностного натяжения в жидком гелии равен $\sigma = 0,36 \text{ мН/м}$, энергия связанная с поверхностью равна $E = \sigma S$.

Решение.

Внутри пузырька электрон локализован на длине порядка R , тогда его неопределенность импульса $\Delta p \approx \frac{\hbar}{R}$. В основном состоянии неопределенность импульса порядка среднеквадратичного импульса. Поэтому средняя кинетическая энергия электрона равна

$$E_k \approx \frac{\hbar^2}{2mR^2}, \text{ где } m \text{ — масса электрона. Эта энергия убывает с ростом радиуса.}$$

С другой стороны, пузырек радиуса R обладает энергией поверхностного натяжения равной $E_s = \sigma S = 4\pi\sigma R^2$. Эта энергия растёт с ростом радиуса.

Для оценки оптимального радиуса (при котором энергия минимальна) можно с точностью нашей оценки просто приравнять эти вклады: $R^4 \approx \frac{\hbar^2}{8\pi\sigma m} \approx (10 \text{ \AA})^4$.

Задача 2

Найдите отношение количеств теплоты, необходимых для изменения температуры кристалла алмаза на 1К, при начальной температуре в 1К и 100К. Температура Дебая для алмаза равна 2200К.

Решение.

Как известно, внутренняя энергия твердого тела при низкой температуре $U \propto T^4$. Так как температура Дебая алмаза много больше рассматриваемых температур, то мы можем считать их достаточно низкими.

$$\text{Таким образом: } \frac{U_{100}}{U_1} = \frac{101^4 - 100^4}{2^4 - 1^4} = \frac{(100+1)^4 - 100^4}{15} \approx \frac{4 \times 100^3 \times 1}{15} \approx 2,6 \cdot 10^5$$

То есть, энергия, необходимая для изменения температуры тела на 1К при разных начальных условиях отличается на 5 порядков.