

Национальный исследовательский университет
Высшая Школа Экономики

курс-майнор 2017-2018 уч.года
«Квантовая физика 'для чайников'»

В.Н.Глазков

Лекция 11

Макроскопические квантовые явления II:
Полупроводники, двумерные электронные системы,
квазичастицы.

Оглавление

| | |
|---|----|
| Задачи лекции..... | 4 |
| Элементарная физика полупроводников..... | 4 |
| Валентная зона и зона проводимости..... | 4 |
| Необычные «атомы» в полупроводнике: электрон донорной примеси..... | 5 |
| Необычные «атомы» в полупроводнике: экситоны..... | 6 |
| Двумерные электронные системы..... | 8 |
| Полевой транзистор..... | 8 |
| Возможность формирования двумерного электронного газа..... | 9 |
| Двумерный электронный газ в магнитном поле. Квантовый эффект Холла..... | 12 |
| Эффект Холла..... | 12 |
| Циклотронная орбита и квантование циклотронного движения..... | 13 |
| Квантовый эффект Холла..... | 14 |
| Квантование колебаний решётки кристалла. | 17 |
| Низкотемпературная теплоёмкость твёрдых тел. | 19 |

Список литературы

- 1: T. Kazimierczuk, D. Fröhlich, S. Scheel, H. Stolz and M. Bayer, Giant Rydberg excitons in the copper oxide Cu₂O, Nature, 514, 343 (arxiv 1407.0691) (2014)
- 2: В.Л.Бонч-Бруевич и С.Г.Калашников, Физика полупроводников, 1990
- 3: wikipedia.org, Field-effect transistor, 2017, https://en.wikipedia.org/wiki/Field-effect_transistor
- 4: Klaus von Klitzing, The Quantized hall effect, Nobel Prize Lecture, (1985)
- 5: Klaus von Klitzing , Developments in the quantum Hall effect, Phylosophical Transaction of the Royal Society A, 363, 2203 (2005)
- 6: Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теоретическая физика том 3. Нерелятивистская квантовая механика,
- 7: Klaus von Klitzing, 25 Years of Quantum Hall Effect (QHE): A Personal View on the Discovery, Physics and Applications of this Quantum Effect, Seminaire Poincare, 2, 1 (2004)
- 8: Ч.Киттель, Введение в физику твёрдого тела,
- 9: Frank Pobell, Matter and Methodsat Low Temperatures, 2007
- 10: W. R. Gardner, J. K. Hoffer, and N. E. Phillips, Thermodynamic Properties of 4He. The hcp Phase at Low Densities, Phys. Rev. A, 7, 1029 (1973)
- 11: Малков М.П. и др., Справочник по физико-техническим основам криогеники,
- 12: D.R.Smith and F.R.Fickett, Low-Temperature Properties of Silver, Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, 100, 119 (1995)

Задачи лекции

Цель данной лекции — показать ряд примеров, в которых квантовые свойства оказываются определяющими для различных физических систем. Эти примеры показывают, что проявления квантовых свойств весьма разнообразны и наш мир действительно живёт по кажущимся иногда необычным (и даже «странным») законам квантовой механики. Однако здесь необходимо ещё раз напомнить, что эта кажущаяся «странность» является следствием того, что наш жизненный опыт формируется в основном классическими (не квантовыми) явлениями.

Элементарная физика полупроводников

Валентная зона и зона проводимости

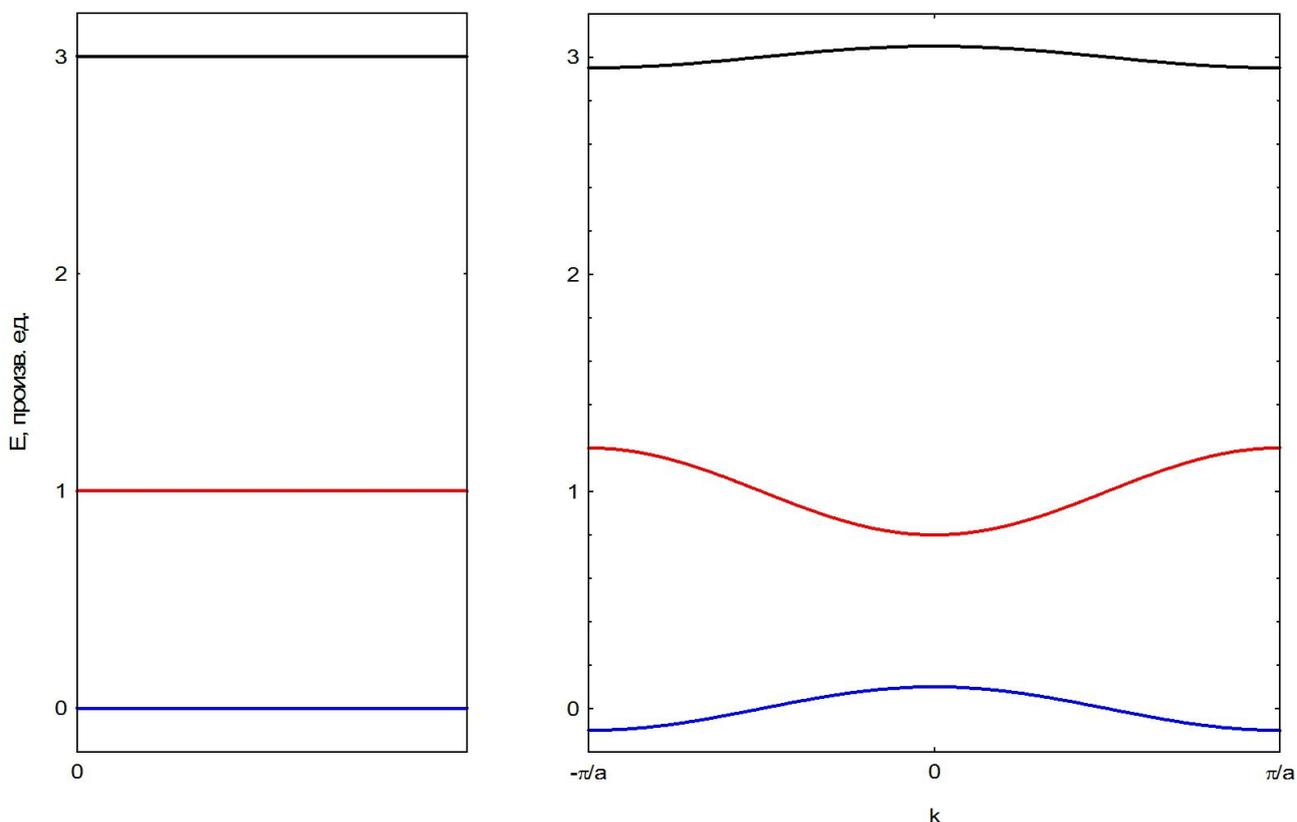


Рисунок 1: Слева: система исходных (одноатомных) уровней (схематически). Справа: размытие уровней в зоны, полученное в модели сильной связи (схематически)

На прошлой лекции обсуждалась причина возникновения подвижных электронов в металле: если атомы подвести близко друг к другу, то электроны начнут туннелировать с атома на атом и начнут передвигаться по кристаллу — то есть в каком-то смысле станут свободными. Это качественное рассуждение является упрощенным изложением так называемой модели

сильной связи.¹ На качественном уровне, однако, легко заметить, что всё устроено несколько сложнее.

Если электрон стал свободным, начал передвигаться по кристаллу, то его энергия стала зависеть от импульса — как говорят, «появилась дисперсия у этого электронного состояния». При этом вместо дискретного уровня энергии исходного атома у электрона в кристалле оказывается возможен целый интервал энергий, называемый разрешенной энергетической зоной. Но мы знаем, что электроны являются ферми-частицами, что необходимо дополнительно учитывать в нашем рассуждении про переход электрона — если электронные состояния на соседнем атоме заняты, то запрет Паули запрещает туннелирование.

Поэтому возможна ситуация (в простейшем случае — если рядом оказались атомы с полностью заполненными оболочками), когда, несмотря на близость атомов друг к другу, свободных электронов не возникает. Такая ситуация соответствует тому, что все электронные состояния в данной зоне заняты. Такое соединение будет диэлектриком.

С другой стороны, даже в изолированном атоме при конечной температуре электрон может оказаться в одном из возбужденных состояний. В кристалле это тоже возможно и при переходе электрона в свободную зону он становится делокализованным — может перемещаться по кристаллу (запрет Паули не мешает, нет соседей). При этом в ранее заполненной зоне возникает вакансия («дырка»), которая также может перемещаться по кристаллу. Точнее, на место этой вакансии может перейти другой электрон и вакансия сместится. Можно показать, что такая вакансия ведёт себя как частица с зарядом равным минус заряду электрона, то есть положительно заряженная.

Если расстояние между соседними зонами (называемое запрещённой зоной) не очень большое (менее 3 эВ), то при комнатной температуре достаточно большое число электронов окажется в возбужденном состоянии и формально диэлектрический кристалл будет проводить ток. Такие вещества называют *полупроводниками*, энергетическую зону, которая полностью свободна при $T=0$, называют *зоной проводимости*, а полностью занятую при $T=0$ зону называют *валентной зоной*.

Отметим сразу, что из наших рассуждений сразу следует, что полупроводниковые приборы чувствительны к изменениям температуры, так как их проводящие свойства сильно изменятся с изменением температуры.

Полупроводниковые приборы являются основой всех современных технологий в области вычислительной техники, коммуникаций. Мы не будем подробно рассматривать принципы действия таких приборов, а только рассмотрим несколько ярких явлений.

Необычные «атомы» в полупроводнике: электрон донорной примеси.

Необычный «неядерный» пример водородоподобного атома связан с полупроводниковой технологией. Для создания полупроводниковых приборов в полупроводник вводят примеси, один из типов примеси (донорная примесь) имеет больше валентных электронов, чем атомы кристалла полупроводника, поэтому этот «лишний» электрон не участвует в формировании химической связи. В результате «лишний» электрон оказывается локализован при низкой температуре вблизи примеси. Из-за взаимодействия с другими атомами полупроводникового

¹ Более строгое решение может быть найдено в литературе, но для нашего курса оно не важно.

кристалла этот электрон начинает описываться некоторой эффективной массой, которая в распространенных полупроводниках оказывается примерно в 10 раз меньше массы свободного электрона. Кроме того, внутри диэлектрика кулоновские силы ослаблены в ϵ раз, где $\epsilon \approx 10$ диэлектрическая проницаемость полупроводника. В результате «боровский радиус» такого электрона оказывается в 100 раз больше, чем в атоме водорода, а масштаб энергий — в 1000 раз меньше². Получим энергию связи электрона порядка 10 миллиэлектронвольт, что соответствует температурам около 100К. Поэтому при комнатной температуре такой «атом» ионизируется и электрон начнёт перемещаться по кристаллу, давая вклад в проводимость полупроводника. Мы не будем пытаться сейчас обсуждать как при помощи допирования разными примесями создаются разные полупроводниковые приборы, отметим лишь что мы уже частично объяснили почему свойства полупроводниковых приборов сильно зависят от температуры — необходимые для их работы подвижные заряды берутся в результате теплового возбуждения.

Необычные «атомы» в полупроводнике: экситоны

Как мы уже сказали, в полупроводнике при переходе электрона в зону проводимости образуется вакансия-«дырка», похожая на положительную частицу. Этот процесс похож на рождение пары частица-античастица в ядерной физике. Но так как эти две частицы имеют разный заряд, то они притягиваются и могут сформировать «атом» аналогично, например, связанному состоянию электрона и позитрона — позитронию, о котором уже упоминалось. Такую пару называют экситоном.³

Энергия связи экситона тогда легко определяется перенормировкой формул для атома водорода:

$$E_n = -\frac{1}{\epsilon^2} \frac{m_e m_h}{m_0(m_e + m_h)} R_y \frac{1}{n^2}, \text{ где } R_y = 13.6 \text{ эВ}.$$

А полная энергия экситона, который может двигаться как целое:

$$E = E_g - \frac{1}{\epsilon^2} \frac{m_e m_h}{m_0(m_e + m_h)} R_y \frac{1}{n^2} + \frac{\hbar^2}{2(m_e + m_h)} k^2, \text{ где } k \text{ — волновой вектор экситона, а } E_g$$

— минимальная энергия электрона в зоне проводимости.

Важно отметить, что для образования экситона требуется несколько меньшая энергия, чем для образования свободной электронно-дырочной пары. Поэтому образование экситонов можно наблюдать в оптическом эксперименте как появление узких линий оптического поглощения при энергии фотона чуть меньшей (на величину энергии связи), чем ширина запрещённой зоны. Соответствующие частоты поглощения определяются очевидным

условием (возбуждаются только экситоны с $k=0$) $\hbar\omega = E_g - \frac{1}{\epsilon^2} \frac{m_e m_h}{m_0(m_e + m_h)} R_y \frac{1}{n^2}.$

2 Заменяем в формулах для энергии и боровского радиуса ($R_y = \frac{1}{2} \frac{k m e^4}{\hbar^2} = 13.6 \text{ эВ}$,

$$r = \frac{\hbar^2}{k m e^2} \approx 0.5 \text{ \AA} \text{) массу электрона на } m/10, \text{ а квадрат заряда на } e^2/\epsilon \approx e^2/10$$

3 Строго говоря, речь идёт только про экситоны Ванье-Мотта, в которых расстояние между электроном и дыркой велико по сравнению с межатомным расстоянием.

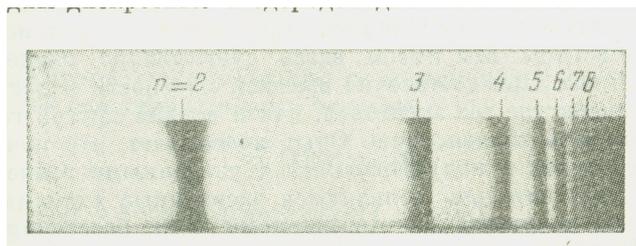


Рисунок 2: Спектр пропускания полупроводника Cu_2O на границе жёлтого края поглощения. Температура 1.3 К. По книге [2].

Экситоны были впервые наблюдаены в 50-х годах 20 века в полупроводниковой закиси меди Cu_2O советским физиком Е.Ф.Гроссом и его сотрудниками (см., например, учебник [2]). Пример фотографии спектра пропускания из оригинальной работы показан на рисунке 2. Пока энергия светового кванта меньше ширины запрещённой зоны поглощения с передачей энергии электрону быть не может. Однако вблизи границы поглощения (когда энергия кванта сравнивается с шириной запрещённой зоны) наблюдался ряд полос поглощения, связанных с возбуждением экситонных состояний.⁴

Этот эксперимент был недавно повторён с использованием современного оборудования [1]. С использованием перестраиваемого лазера в качестве источника света удалось наблюдать переходы в экситонные состояния с $n \leq 25$ (рисунок 4). Радиус экситона в состоянии с $n=25$ составляет около 1 мкм.

Зависимость энергии экситонного состояния (отсчитанной от дна зоны проводимости) от квантового числа n следует предсказанию простой водородоподобной модели $\propto \frac{1}{n^2}$ (рисунок 3).

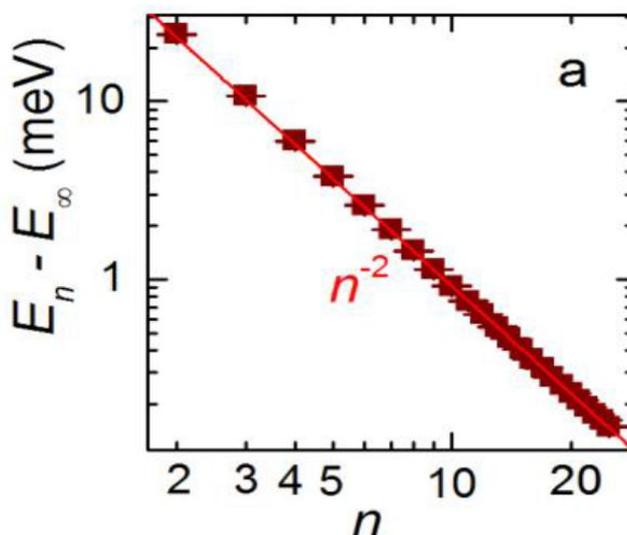


Рисунок 3: Зависимость энергии экситона от главного квантового числа. Из статьи [1].

⁴ Строго говоря, в случае Cu_2O из-за особенностей зонной структуры (обсуждаемых, например, в приложениях к статье [1]) возбуждаются экситоны в состоянии с орбитальным моментом $l=1$ (Р-экситоны). Это связано с дополнительными правилами отбора по чётности, возникающими при анализе поглощения света. Подробное рассмотрение выходит за рамки нашего курса. По этой причине оптический переход в состояние с $n=1$ не наблюдается (для $n=1$ есть только s-состояния).

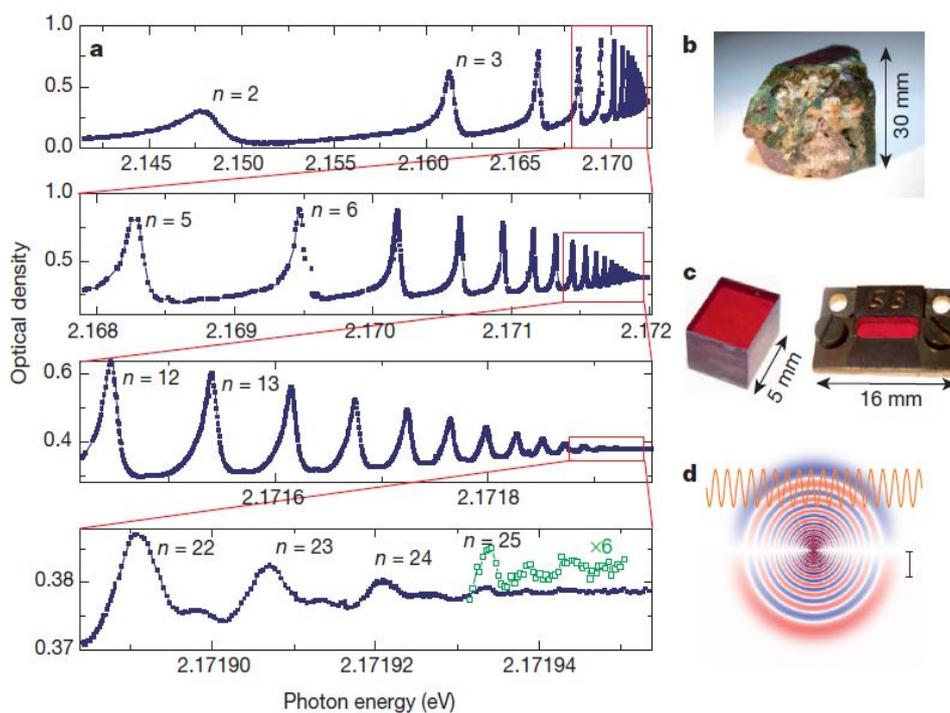


Рисунок 4: (a) Поглощение (оптическая плотность) в Si_2O как функция энергии фотона. Температура 1.2K. (b) Природный кристалл Si_2O , из которого вырезались образцы для исследования. (c) смонтированные на приборные столики пластинки Si_2O . Толщина образцов около 30 мкм. (d) Расчёт волновой функции экситона с $n=25$, для масштаба показана синусоида с длиной волны равной длине волны используемого для возбуждения света. Из статьи [1].

Двумерные электронные системы

Полевой транзистор

Основным элементом полупроводниковых приборов сейчас является полевой транзистор [3]. Упрощенная схема (одна из возможных, так называемый МОП-транзистор, названный так по его основным элементам: металлу, оксиду и полупроводнику) показана на рисунке 5.

Напомним, что транзистор — это такой прибор, в котором током между двумя электродами можно управлять при помощи напряжения на третьем электроде. Такая возможность управления позволяет далее реализовать и логические схемы, и разные аналоговые преобразования сигнала (усиление и другие).

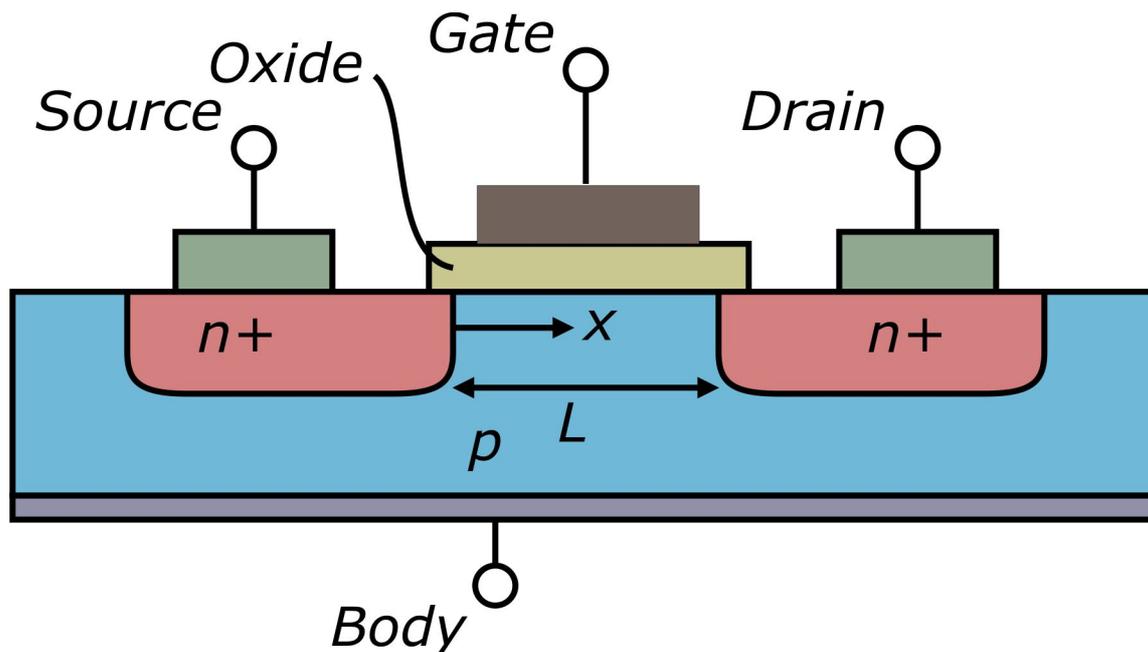


Рисунок 5: Схема устройства полевого МОП-транзистора. С сайта [3]

Основной идеей работы МОП-транзистора является то, что ток электронов между истоком (source) и стоком (drain) может быть подавлен, если на затвор (gate) приложить отрицательное напряжение. Тогда электрическое поле затвора «выталкивает» электроны из промежутка между истоком и стоком, препятствуя протеканию электрического тока.

Возможность формирования двумерного электронного газа

Мы живём в трёхмерном мире, он нам привычен. В этом мире положение точки описывается тремя координатами, у всех векторов (в том числе вектора импульса) есть три проекции. В этом мире существует огромное множество интересных явлений, изучение которых предоставляет большое поле деятельности для всех наук, в том числе и физики.

Однако для физики представляют интерес и системы меньшей пространственной размерности (одно- и двумерные, а иногда даже и ноль-мерные «квантовые точки»). Этот интерес в основном связан с тем, что в системах с пониженной размерностью могут проявляться явления, отсутствующие в случае «обычных» трёх измерений, что часто связано с увеличением роли квантовых эффектов.

Одним из способов получить двумерную систему является как раз полевой транзистор. Далее мы рассмотрим вкратце особенности получения такой системы, а также одно яркое явление с ними связанное: квантовый эффект Холла [4], [5].

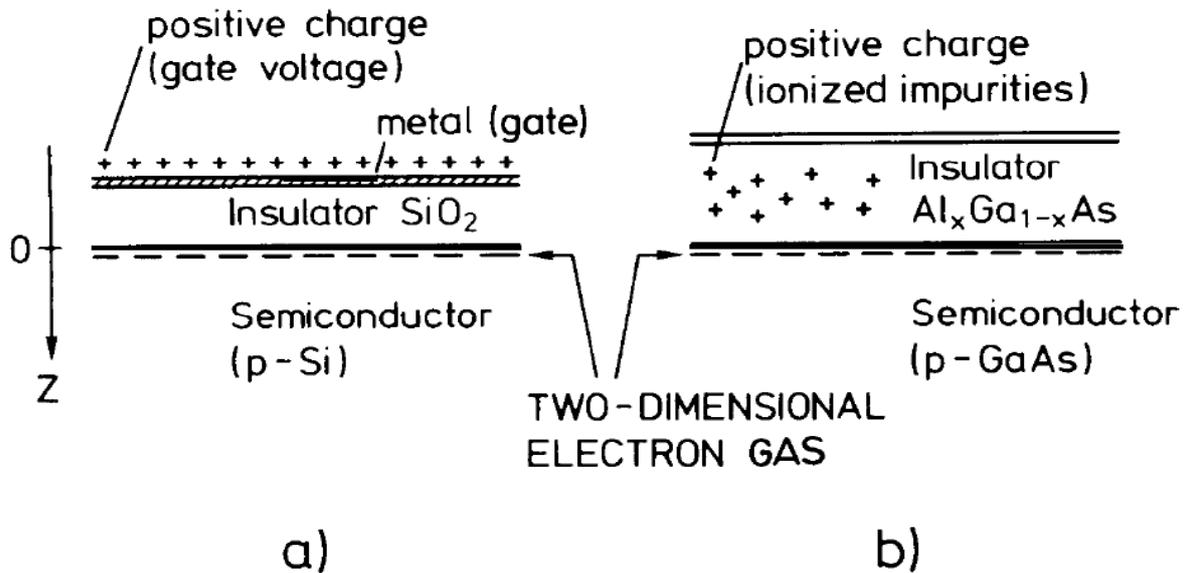


Fig. 1. A two-dimensional electron gas (2DEG) can be formed at the semiconductor surface if the electrons are fixed close to the surface by an external electric field. Silicon MOSFETs (a) and GaAs-Al_xGa_{1-x}As heterostructures (b) are typical structures used for the realization of a 2DEG.

Рисунок 6: Способы формирования двумерного электронного газа в полупроводниковых структурах. Из нобелевской лекции фон Клитцинга [4].

Приложение положительного потенциала к затвору (вариант полевого МОП-транзистора) притягивает электроны к границе полупроводник-изолятор.

Это притяжение соответствует потенциалу $\phi = -Ez$, где E - напряжённость электрического поля, а z - расстояние от границы полупроводника. Рассмотрим упрощённую модель, когда есть всего один электрон. Потенциальная энергия электрона с зарядом $-e$ $U = eEz$ неограниченно растёт в этой модели с удалением от границы. На границе полупроводник диэлектрик имеется потенциальный барьер бесконечной высоты (туннелированием пренебрегаем).

Рассмотрим одиночный свободный электрон в таком потенциале.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + eEz = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) + U .$$

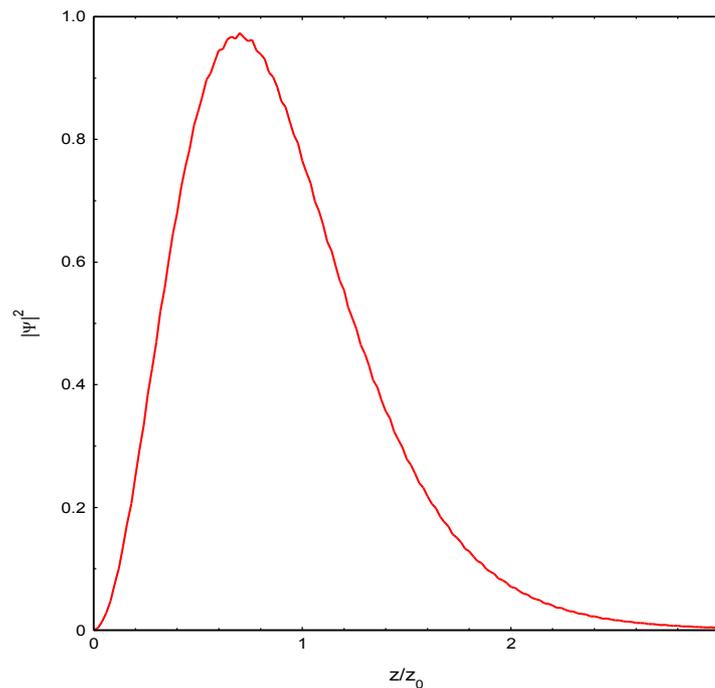


Рисунок 7: Распределение электрона по Z-координате для основного состояния электрона в треугольной потенциальной яме.

Уравнение Шредингера

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + (W - U) \Psi = 0, \quad U = \begin{cases} \infty, & z < 0 \\ eEz, & z > 0 \end{cases}$$

во избежание путаницы с напряжённостью электрического поля энергия обозначена W .

Разделяя переменные x, y и z ($\Psi(x, y, z) = \sigma(x, y) \xi(z)$), получим уравнения для свободной частицы в плоскости XY с энергией $W_{x,y} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2)$

и уравнение для движения вдоль Z

$$\frac{d^2 \xi(z)}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (W_z - eEz) \xi(z) = 0$$

для неограниченного линейного роста потенциала уравнение решено в [6].⁵

Точное решение этого уравнения нам специально не интересно — мы понимаем, что это

⁵ Делаем замену переменной $a = \left(-z + \frac{W_z}{eE} \right) \left(\frac{2meE}{\hbar^2} \right)^{1/3}$, $\frac{d^2 \xi(a)}{da^2} + a \xi(a) = 0$. Функция $\xi(a)$

выражается через функции Эйри $\xi(a) = \text{const} \Phi(-a)$, где $\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{u^2}{3} + au\right) du$.

Бесконечность потенциала при $z < 0$ в нашем случае требует, чтобы $\xi(z=0) = 0$, то есть

$$\xi\left(a = \frac{W_z}{eE} \left(\frac{2meE}{\hbar^2} \right)^{1/3}\right) = 0, \text{ что и является условием квантования энергии. Первые нули функции Эйри}$$

могут быть найдены численно, значения нескольких первых нулей равны -1.76 , -2.71 , -3.39 , -3.96 .

уравнение описывает финитное одномерное движение и поэтому уровни энергии должны квантоваться. Характерный масштаб энергий может быть оценен по соотношению неопределённости как энергия основного состояния: полная энергия электрона

$$W = \frac{p^2}{2m} + eEz, \text{ в основном состоянии } p \simeq \frac{\hbar}{z}. \text{ Минимизируя далее энергию по } z$$

получим $z^3 \simeq \frac{\hbar^2}{meE}$ и характерная энергия $W \sim \left(\frac{\hbar^2}{m}\right)^{1/3} (eE)^{2/3}$.

Оценим масштаб расстояния между уровнями размерного квантования, используя массу свободного электрона и считая что напряженность электрического поля $1 \text{ В/мкм} = 10^6 \text{ В/м}$ $\Delta W \sim 40 \text{ К}$.⁶ Таким образом, при гелиевых температурах реально достичь условий квантования движения вдоль оси z . При достаточно низкой температуре движение вдоль оси Z окажется «вымерзшим», а движение в плоскости XY останется свободным — наш электрон в каком-то смысле стал «двумерным»!

Характерное размытие электронного распределения вдоль оси Z задаётся масштабом $z_0 = \left(\frac{\hbar^2}{2meE}\right)^{1/3}$, его оценка для той же напряжённости электрического поля $z_0 \sim 11 \text{ нм}$.

Распределение вероятности (квадрат модуля волновой функции) для основного состояния электрона в треугольной потенциальной яме показано на Рисунке 7.

Двумерный электронный газ в магнитном поле. Квантовый эффект Холла.

Эффект Холла

Рассмотрим следующий опыт. Пусть через образец в форме бруска пропускается электрический ток в направлении X и кроме этого приложено магнитное поле в направлении Z (рисунок 8). Нас будут интересовать падения напряжения на образце вдоль направления распространения тока и в поперечном направлении.

Под действием магнитного поля движущиеся заряженные частицы отклоняются вдоль оси Y , на границах образца накапливается избыточный заряд, электрическое поле которого в равновесии компенсирует силу Лоренца, и возникает поперечное (холловское) напряжение. Объединяя уравнения динамики в электрическом и магнитном полях получаем:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

В условиях компенсации напряженность электрического поля вдоль оси Y равна $E_y = V_x B$, скорость определяется током $I_x = qnSV_x$, где n — концентрация носителей заряда, S — площадь сечения проводника. Откуда $E_y = \frac{U_y}{L_y} = \frac{B}{qnS} I_x$.

⁶ Мы считаем, что напряжение на затворе 1В приложено к слою толщиной 1 мкм. Эта оценка вероятно завышена: для сравнения заметим, что напряжение пробоя типичных диэлектриков порядка нескольких десятков кВ/мм.

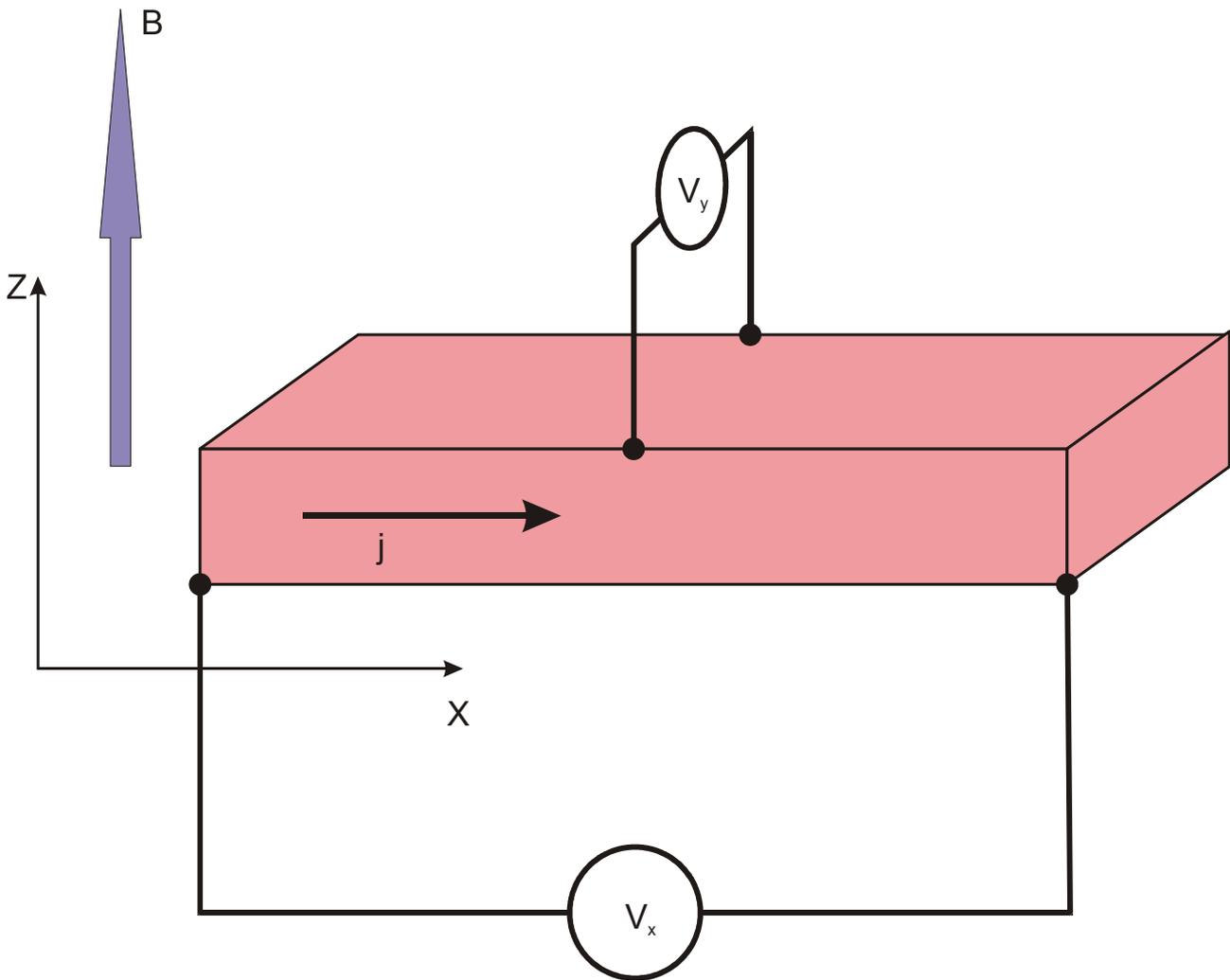


Рисунок 8: Схема опыта по измерению эффекта Холла.

Эффект Холла позволяет измерять магнитное поле (используется во многих датчиках), концентрацию носителей. Кроме этого, заметьте, *знак* холловского напряжения зависит от знака носителя заряда: холловское напряжение будет иметь разный знак для проводника, в котором основной ток переносят отрицательно заряженные электроны и положительно заряженные дырки.

Циклотронная орбита и квантование циклотронного движения

В магнитном поле на электрон действует сила Лоренца, которая заставляет его двигаться по кругу. Это движение описывается уравнением $m \frac{V^2}{r} = q V B$. Добавляя уравнение квантования (целое число длин волн де Бройля на траектории) $p 2\pi r = n h$, получим для радиуса n-ой орбиты $r_n = \sqrt{\frac{n \hbar}{q B}}$, в поле 10Тл радиус первой орбиты равен примерно 100Å.

Квантовый эффект Холла

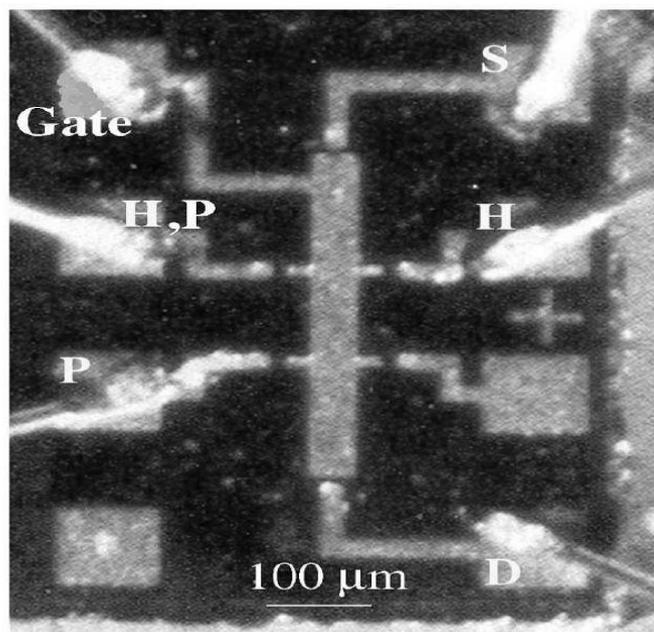
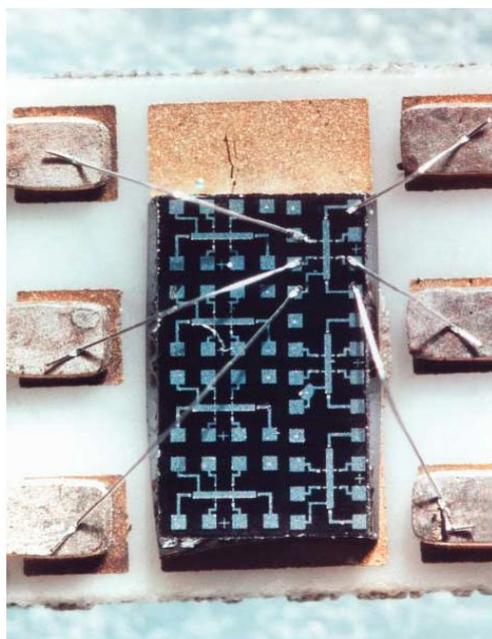


Рисунок 9: Слева: чип с кремниевыми МОП транзисторами, используемый в опытах по квантовому эффекту Холла. Из статьи [5]. Справа: увеличенное изображение одного из транзисторов с обозначением используемых электродов (H — измерение холловского напряжения, P — измерение продольного напряжения, $Gate$ — затвор, S — исток, $source$, D — исток, $drain$). Из статьи [7].

Квантовый эффект Холла был одним из ярких физических открытий конца 20 века. Экспериментально обнаруженный Клитцингом в 1980 году⁷, этот эффект (и связанные с ним эффекты) активно изучался на протяжении более 30 последующих лет. В истории этих исследований и, последовавшее вскоре за открытием Клитцингом целочисленного квантового эффекта Холла, открытие дробного квантового эффекта (1982 год, Цуи, Штормер и Госсард), и две Нобелевские премии (1985 год — Клитцинг, 1998 год — Цуи с соавторами), и принятие квантового эффекта Холла в качестве метрологического стандарта сопротивления.

Прежде чем начинать короткий разговор о физике этого явления отметим, что этот прогресс существеннейшим образом связан с прогрессом развития полупроводниковых технологий, позволившим создавать структуры (гетероструктуры и полевые транзисторы) с двумерным электронным газом высокой подвижности, с возможностью создания различных геометрий управляющих затворов и измерительных контактов. Эта связь между прогрессом технологии и прогрессом фундаментальных исследований неразрывна: в современной физике невозможно вести исследования на высоком уровне без использования продуктов современных технологий, равно как и современные технологии появляются только там, где есть достаточные возможности для фундаментальных исследований и сопряжённого с ними поиска.

Мы не будем пытаться строго рассмотреть это явление. Отметим несколько простых соображений.

⁷ Клитцинг в статье [7] приводит точные данные о времени и месте «рождения» этого открытия: около 2 часов ночи с 4 на 5 февраля 1980 года в лаборатории высоких магнитных полей (HMFL) в Гренобле (Франция).

Создаваемая в двумерном электронном газе поверхностная плотность электронов равна примерно $10^{11}-10^{12} 1/cm^2$. Это означает, что на один электрон приходится площадка размером примерно $100 \times 100 \text{ \AA}$. В то же время, электроны являются фермионами, не желают находиться по двое в одном квантовом состоянии — а в магнитном поле каждый электрон движется по циклотронной орбите и его состояние описывается номером этой орбиты и координатами его центра.

Это означает, что в магнитном поле возникают специально выделенные ситуации, когда все имеющиеся электроны заняли места с одним радиусом орбиты, радиусы орбит таковы, что траектории электронов «касаются». В результате — все электроны совершают финитное движение по кругу, а их движение в направлении приложенного электрического поля запрещено.

Пример характерных экспериментальных данных [5] показан на рисунке 10. Через образец пропускался постоянный ток 10 мкА и измерялось падение напряжения вдоль образца и в поперечном направлении в зависимости от магнитного поля.

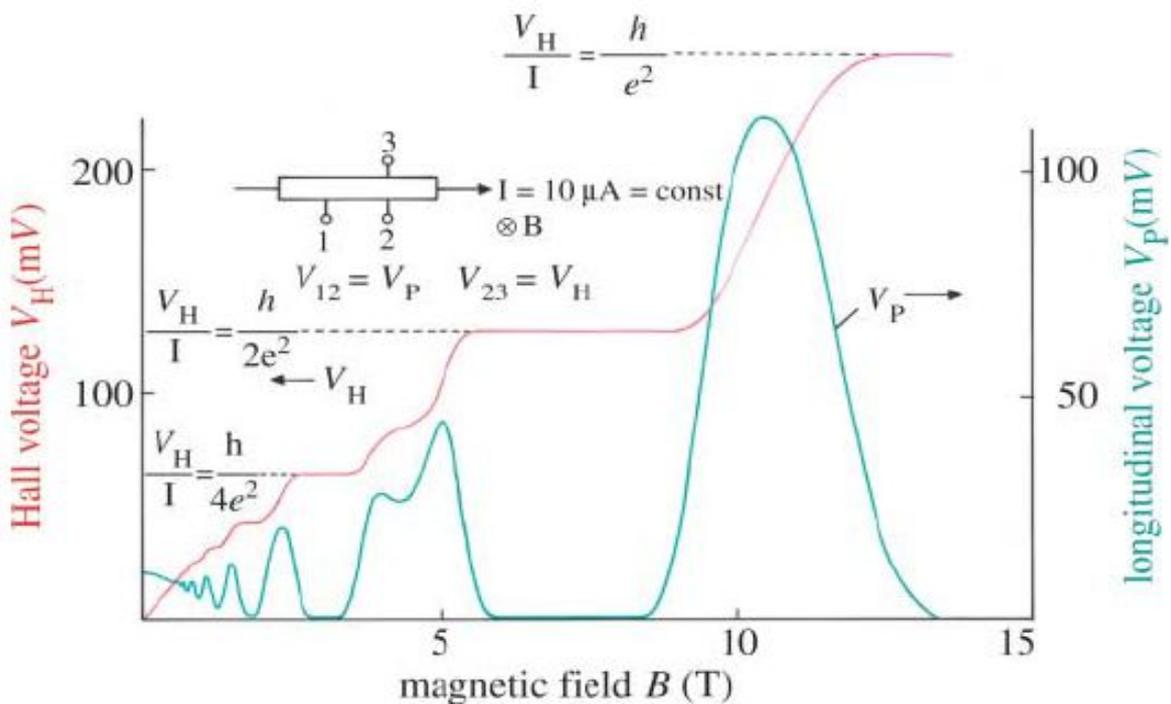


Рисунок 10: Зависимости от магнитного поля продольного и холловского напряжений на гетероструктуре GaAs-AlGaAs при токе 10 мкА. $T=1.6 \text{ K}$. Из статьи [5].

Видно, что обе зависимости имеют сложную форму: в то время как для классического эффекта Холла мы бы ожидали просто линейного роста поперечного (холловского) напряжения и какого-то более слабого изменения продольного напряжения⁸, здесь мы наблюдаем набор плато (горизонтальных участков) холловского напряжения и одновременно с этими плато до нуля проваливается продольное напряжение (пропадает продольное сопротивление). При этом наблюдаемые положения плато холловского напряжения следуют

8 Качественно, влияние магнитного поля на продольное сопротивление связано с тем, что траектория электрона искривляется в магнитном поле и проекция траектории на направление тока (транспортная длина свободного пробега) уменьшается. Это приводит к росту сопротивления в магнитном поле.

ряду $\frac{1}{n}$ (n - целое), а значения холловского сопротивления выражаются через мировые константы $R = \frac{U_H}{I} = \frac{1}{n} \frac{h}{e^2}$.

Этот экспериментальный результат и составляет содержание целочисленного квантового эффекта Холла: в двумерном электронном газе в квантующем магнитном поле при некоторых условиях наблюдаются плато холловского сопротивления, а одновременно с наблюдением плато происходит падение продольного сопротивления до нуля. За обнаружение этого эффекта Клаус фон Клитцинг был удостоен Нобелевской премии по физике (1985 год).

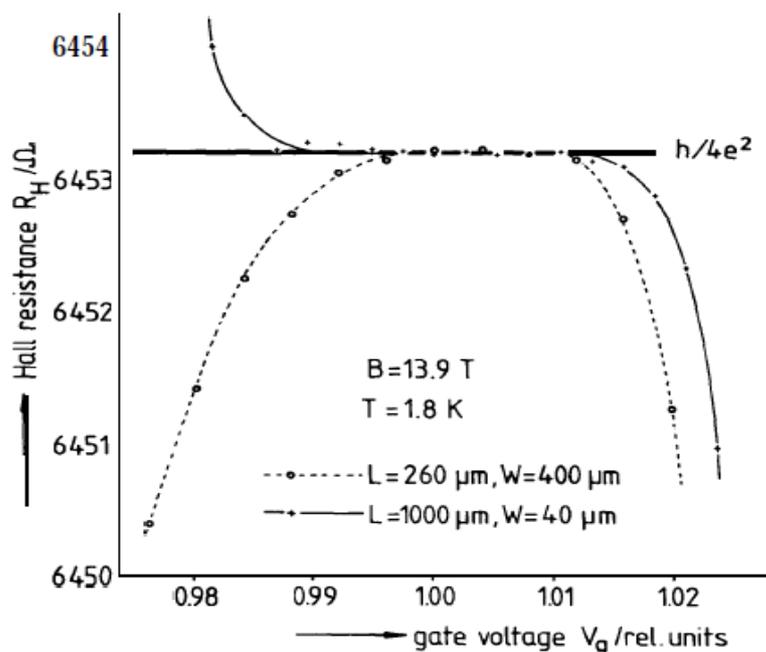


Рисунок 11: Сравнение плато Холловского сопротивления для образцов разной формы (L - длина, W - ширина). На графике изображена зависимость холловского сопротивления от напряжения на затворе МОП-структуры, контролирующего концентрацию электронов в двумерном газе. Из статьи [4].

Удивительным образом оказалось, что величина холловского сопротивления на плато обладает великолепной воспроизводимостью: она не зависит от типа структуры, в которой формируется двумерный газ, не чувствительна к размерам этой структуры (холловское напряжение может измеряться и вдоль длинной и вдоль короткой стороны образца, см. рисунок 11). Воспроизводимость результатов в разных лабораториях находится на уровне 10^{-9} (рисунок 12). Эта независимость от точных параметров образца привела к тому, что квантовый эффект Холла используется как стандарт единицы сопротивления. С 1990 года принято, что $R_H = \frac{h}{e^2} = 25813.801 \text{ Ом}$ (для целей метрологии - точно) [5].

Измерение с высокой точностью холловского сопротивления позволяет также определить с высокой точностью постоянную тонкой структуры $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{2\pi}{R_H c}$

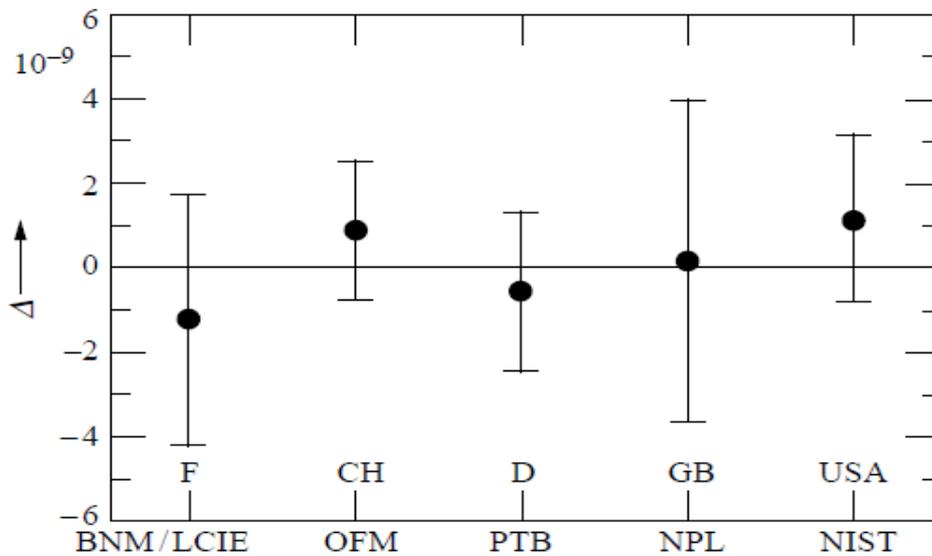


Рисунок 12: Воспроизводимость холловского сопротивления в различных лабораториях. Из статьи [5].

Квантование колебаний решётки кристалла.

Простейшей моделью для рассмотрения колебаний в периодической решётке являются продольные колебания в однородной цепочке атомов. Эта модельная задача описывает, например, распространение продольных волн вдоль одного из основных направлений кубического кристалла: при этом одновременно колеблются целые плоскости атомов, при этом внутри плоскости расстояния между атомами не изменяются.

Считаем, что взаимодействуют друг с другом только ближайшие соседи, ангармоническими слагаемыми в потенциале пренебрегаем. Тогда, если u_j - это смещение атома в j -ой позиции, можно записать классическое уравнение динамики

$$M \frac{d^2 u_j}{dt^2} = C(u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j), \text{ где } M \text{ — масса атома.}$$

Ищем решение в виде бегущей волны $u_j = u_0 e^{i(kx_j - \omega t)}$, координата x пробегает дискретные значения $x_j = j \cdot a$. После подстановки и сокращения общего множителя получаем условие, при котором такое решение существует:

$$-M \omega^2 = C(e^{ika} + e^{-ika} - 2) = -2C(1 - \cos(ka)) = -4C \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right), \text{ где } a \text{ — период цепочки}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

(расстояние между атомами в модельной цепочке или эквивалентными плоскостями в реальном кристалле).

Полученный закон $\omega(k)$ называют законом дисперсии или спектром упругих волн. В длинноволновом пределе $k \rightarrow 0$ он превращается в линейный закон, характерный для звуковых волн: $\omega = a \sqrt{\frac{C}{M}} k = sk$, где s — скорость звука. Соответственно, и закон

дисперсии может быть переписан через скорость звука $\omega = \frac{2s}{a} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$. Это позволяет оценить типичную максимальную частоту такого колебания: характерная скорость звука в твёрдом теле $s = 10^3 \text{ м/сек}$, межатомное расстояние $a = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, откуда получаем $\omega_{max} \approx 10^{13} \text{ 1/сек}$ (соответствует энергии $\sim 7 \text{ мэВ}$ или температуре около 80К).

Групповая скорость волн $V_{gp} = \frac{d\omega}{dk}$ зависит от волнового вектора и обращается в ноль при $k = \pi/a + 2\pi n/a$.

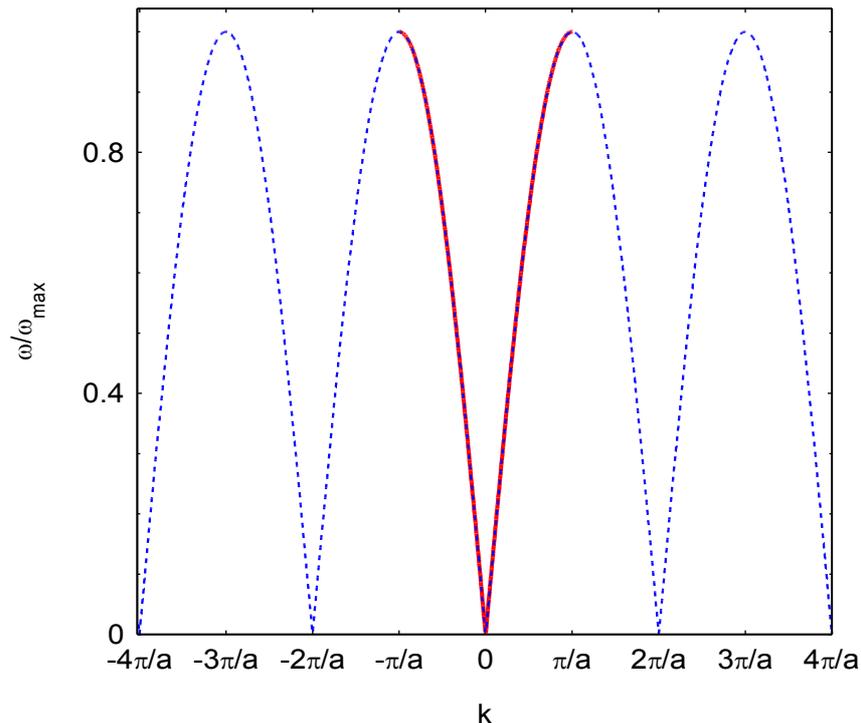


Рисунок 13: Закон дисперсии для колебаний в однородной цепочке атомов. Сплошной красной линией выделен участок внутри первой зоны Бриллюэна.

Полученный в модельной задаче закон дисперсии периодичен по волновому вектору k с периодом $2\pi/a$. Означает ли это, что возможно несколько физически различных колебаний с одной и той же частотой (помимо тривиального случая волн, распространяющихся в противоположных направлениях)?

При поиске решения в виде бегущей волны $u = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$ мы интересовались только смещениями периодически расположенных атомов. Только значения смещения в дискретных точках $x_j = j \cdot a$ имеют физический смысл, а значения переменной $u(x)$ в промежутке между точками решётки никакой информации не несут. Как легко убедиться непосредственной проверкой, волны с волновыми векторами отличающимися на $2\pi/a$ принимают одинаковые значения на дискретной решётке и, следовательно, описывают одну и ту же волну деформации:

$$u(k + 2\pi/a, ja) = u_0 e^{i((k + 2\pi/a)ja - \omega t)} = u_0 e^{i(k \cdot ja - \omega t)} e^{i2\pi j} = u(k, ja) .$$

Графически это иллюстрируется на рисунке 14.

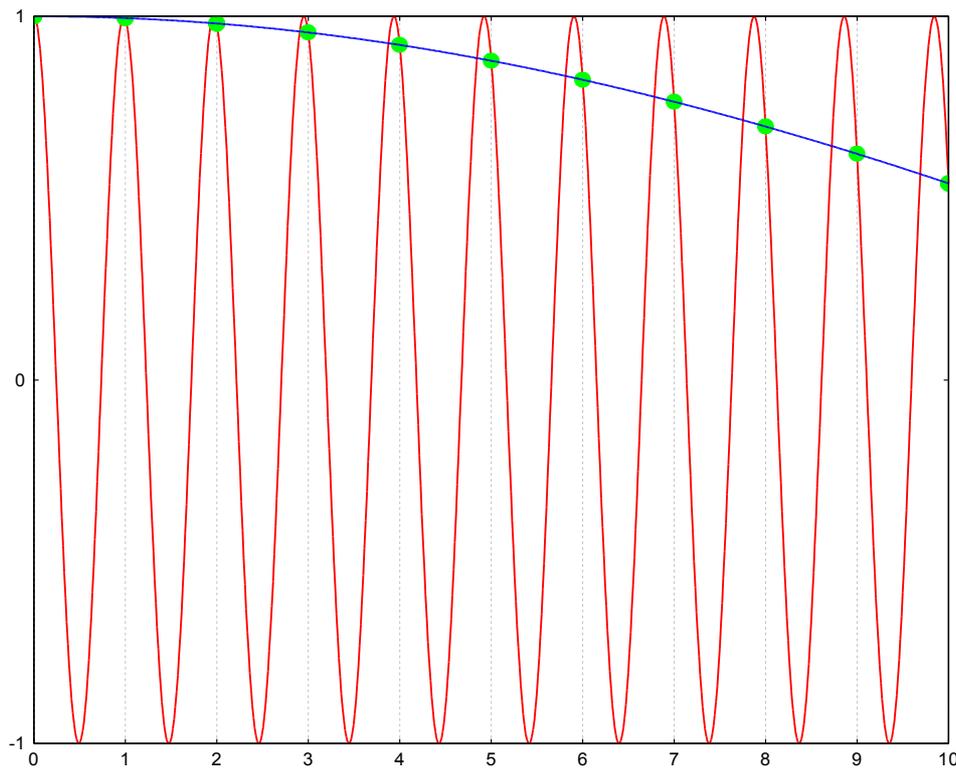


Рисунок 14: Сравнение "мгновенных фотографий" волн с различными волновыми векторами: $k=0.1$ (синяя линия) и $k=0.1+2\pi$ (красная линия). Символами показаны смещения в точках дискретной решётки с единичным периодом.

Таким образом, для выбора физически различных видов колебаний можно ограничиться интервалом в k -пространстве шириной $2\pi/a$. Величина $2\pi/a$ соответствует периоду обратной решётки для нашей задачи.⁹ Таким образом, для одномерной модельной задачи в k -пространстве физически различные типы колебаний оказались собраны внутри элементарной ячейки обратной решётки.

Далее можно рассуждать аналогично тому, как для электромагнитного поля были введены кванты света. Энергия в процессе с частотой ω должна передаваться порциями $\hbar\omega$. Такую порцию — квант колебаний — называют *фононом*. Импульс фонона $p=\hbar k$ в рассмотренной модельной задаче ограничен интервалом от $-\hbar\frac{\pi}{a}$ до $\hbar\frac{\pi}{a}$. Тепловые колебания атомов в кристалле могут быть рассмотрены как процессы рождения фононов.

Низкотемпературная теплоёмкость твёрдых тел.

Напомним одну из «загадок» квантовой физики, с которой мы начали наш курс — отклонение теплоёмкости твёрдых тел от закона Дюлонга и Пти при низких температурах. Как мы уже видели, отклонение от предсказаний теоремы о равномерном распределении связано с тем, что какие-то квантовые степени свободы «вымерзают».

Оказывается, что ответ о теплоёмкости твёрдых тел легко получить используя представление

⁹ Это утверждение легко проверяется либо если дополнить одномерную модельную задачу до трёхмерной двумя единичными ортогональными векторами, либо если вернуться к интерпретации нашей модельной задачи как колебаний плоскостей кубического кристалла.

о фононах. Мы рассмотрим только случай низких температур $k_B T \ll E_{max} \simeq \frac{2\hbar s}{a}$. В этих условиях тепловым образом возбуждаются только колебания с малой энергией, для которых можно считать, что спектр фононов $\omega = s k$. Нас интересует, какая полная тепловая энергия запасена в таких колебаниях.

Однако формально эту же задачу мы уже решали, рассматривая задачу об абсолютно чёрном теле — мы вычисляли плотность энергии электромагнитного поля в полости. Поэтому ответ может быть записан сразу $E = A V T^4$, где A — некоторая константа, V — объём образца, T — его температура.

Отсюда сразу получим ответ для теплоёмкости $C = B T^3$, где B — некоторая константа. Этот закон называют законом Дебая. Приведём для сведения более строгий ответ

$$C \approx \frac{12}{5} \pi^4 N k_B \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3 \quad \text{или на моль} \quad C_{\mu} \approx 233.8 R \left(\frac{T}{\Theta} \right)^3, \quad \text{где } \Theta \text{ — характеристическая для данного}$$

вещества температура Дебая. Характерный масштаб дебаевской температуры $\Theta \sim \frac{3\hbar s}{k_B a}$ в твёрдых телах составляет обычно несколько сотен кельвин (см. таблицу 1). Исключениями являются кристаллы с очень «жёсткими» связями между атомами (такие как алмаз) и, наоборот, кристаллы со слабыми связями атомов (кристаллы гелия).

Таблица 1: Температура Дебая для некоторых веществ. По книгам [8], [9] (другие источники указаны отдельно).

| вещество | Θ, K | вещество | Θ, K | вещество | Θ, K |
|----------|-------------|----------|-------------|----------|-------------|
| алмаз | 2200 | Ag | 227 | Si | 645 |
| Mg | 400 | Au | 162 | Ge | 374 |
| Cu | 344 | He | 26 [10] | Ar | 92 |
| Fe | 470 | NaCl | 275 [11] | Pb | 105 |
| Al | 428 | Pt | 239 | | |

Для иллюстрации на рисунке 15 показаны данные по теплоёмкости металлического серебра (по работе [12]) в сравнении с моделью Дебая.

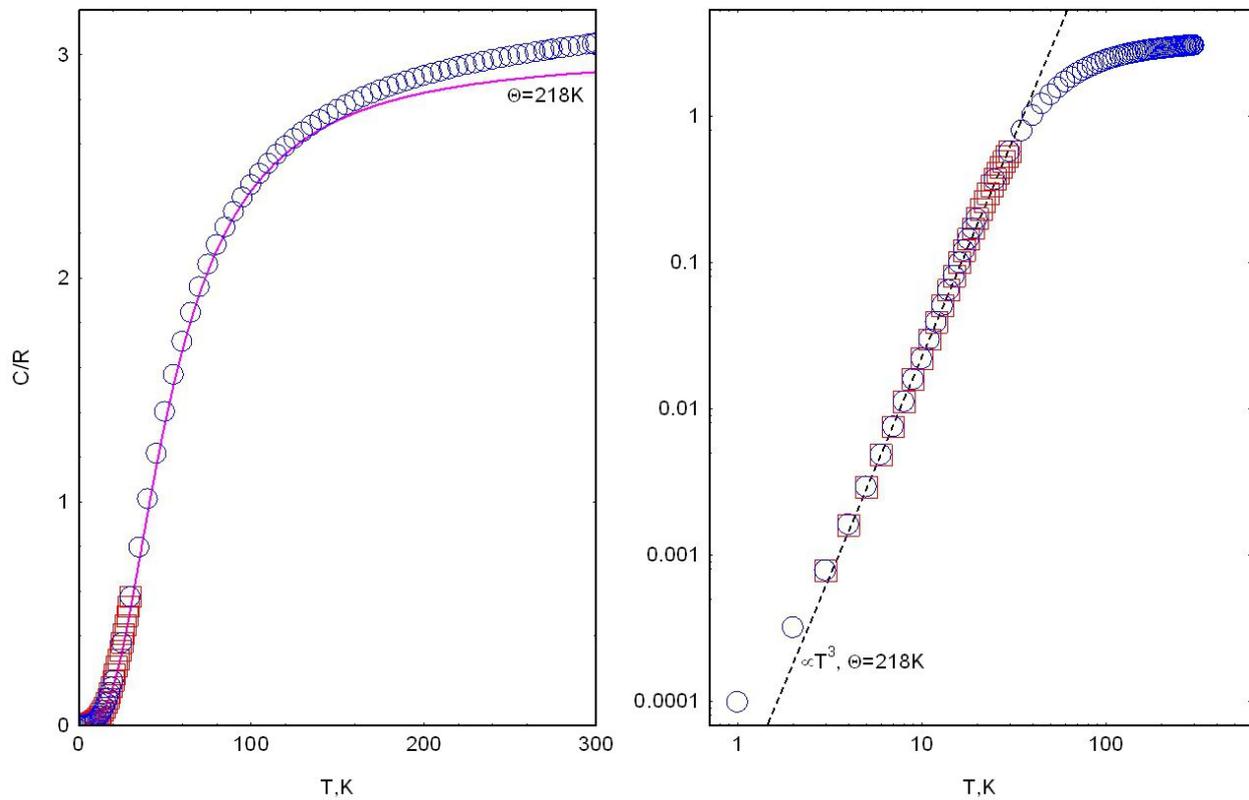


Рисунок 15: Теплоёмкость металлического серебра. Экспериментальные данные из работы [12]. На правой панели показан закон T^3 Дебая с определённой по подгонке приведённых данных температурой Дебая 218K. На левой панели показана полная кривая модели Дебая, вычисленная для $\Theta = 218 K$.