Майнор
“Мир глазами физиков“

Весна 2019

Введение в квантовую физику

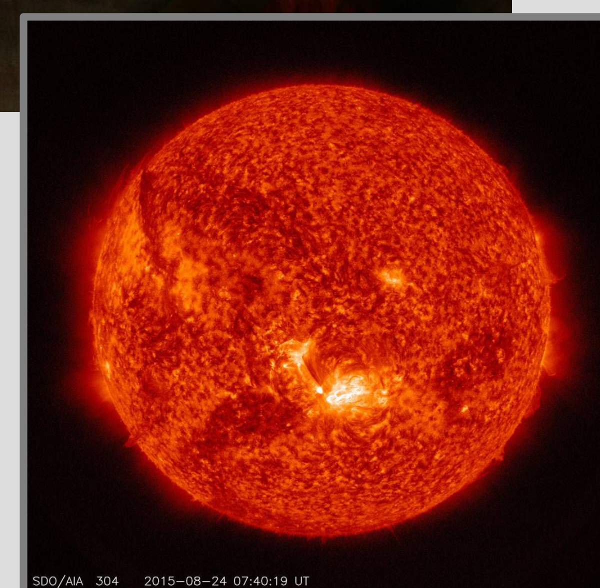
Лекция 3:

Излучение абсолютно чёрного тела

Задача об АЧТ

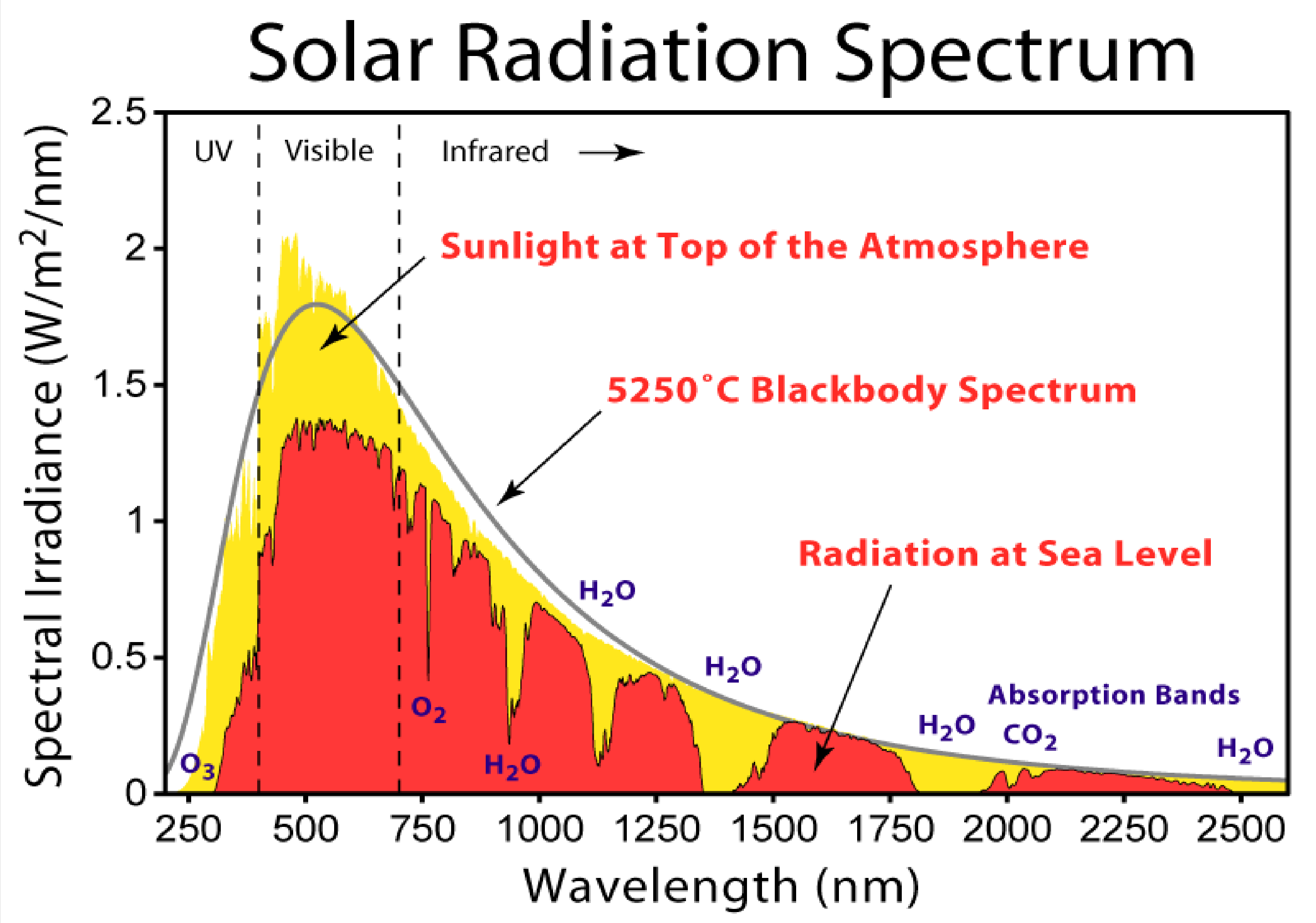
http://rustoria.ru/images/content/w1000/31/31e5429c01a5b298666 45eded7261e76?r=14280261741590941023

https://www.photogorky.ru/photos/092506203c31b1feb489f71f1df9c615.jpg



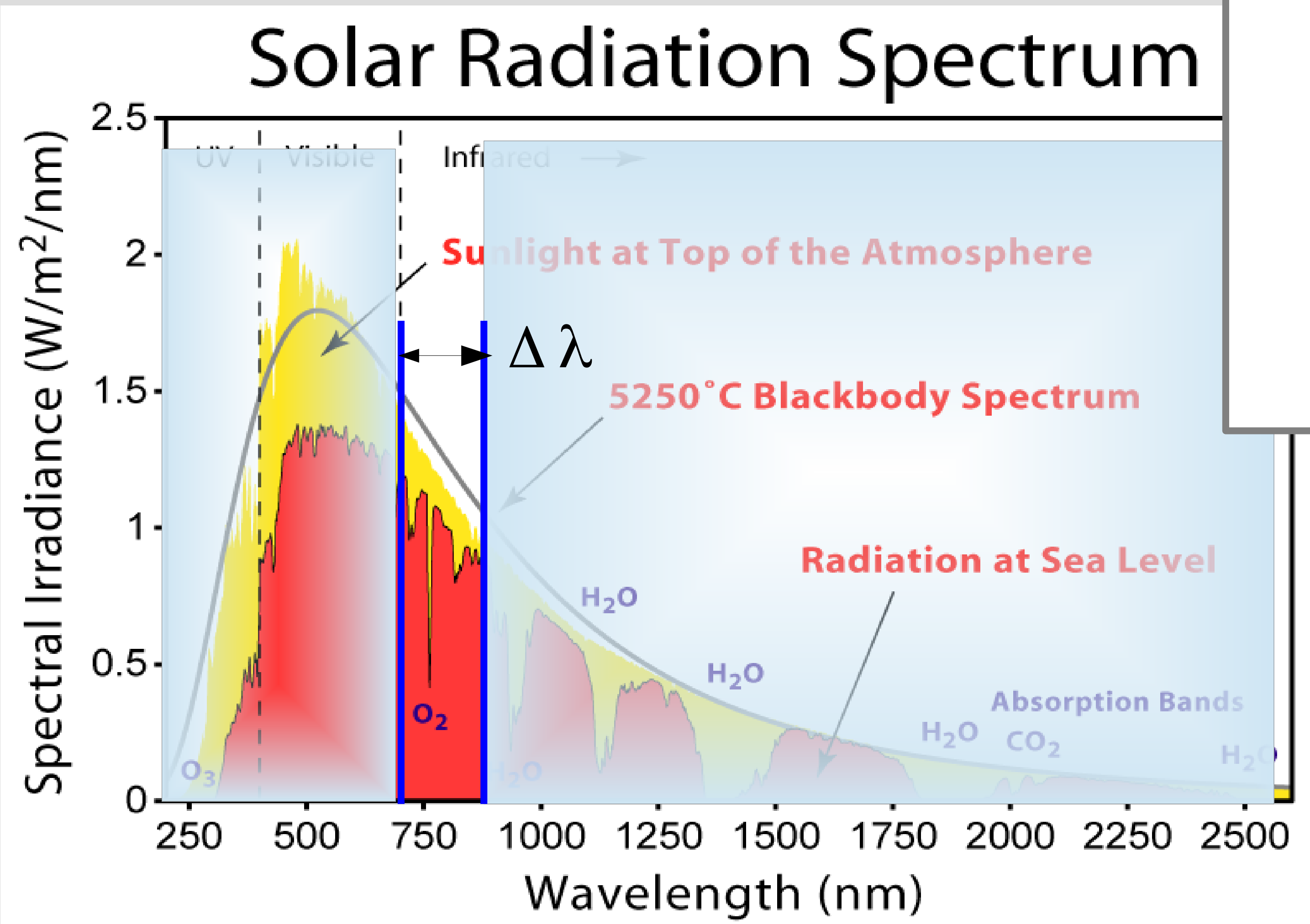
https://www.nasa.gov/image-feature/goddard/sun-releases-m56-class-solar-flare

Спектральная плотность излучения



wikipedia.org: Solar Spectrum

Спектральная плотность излучения



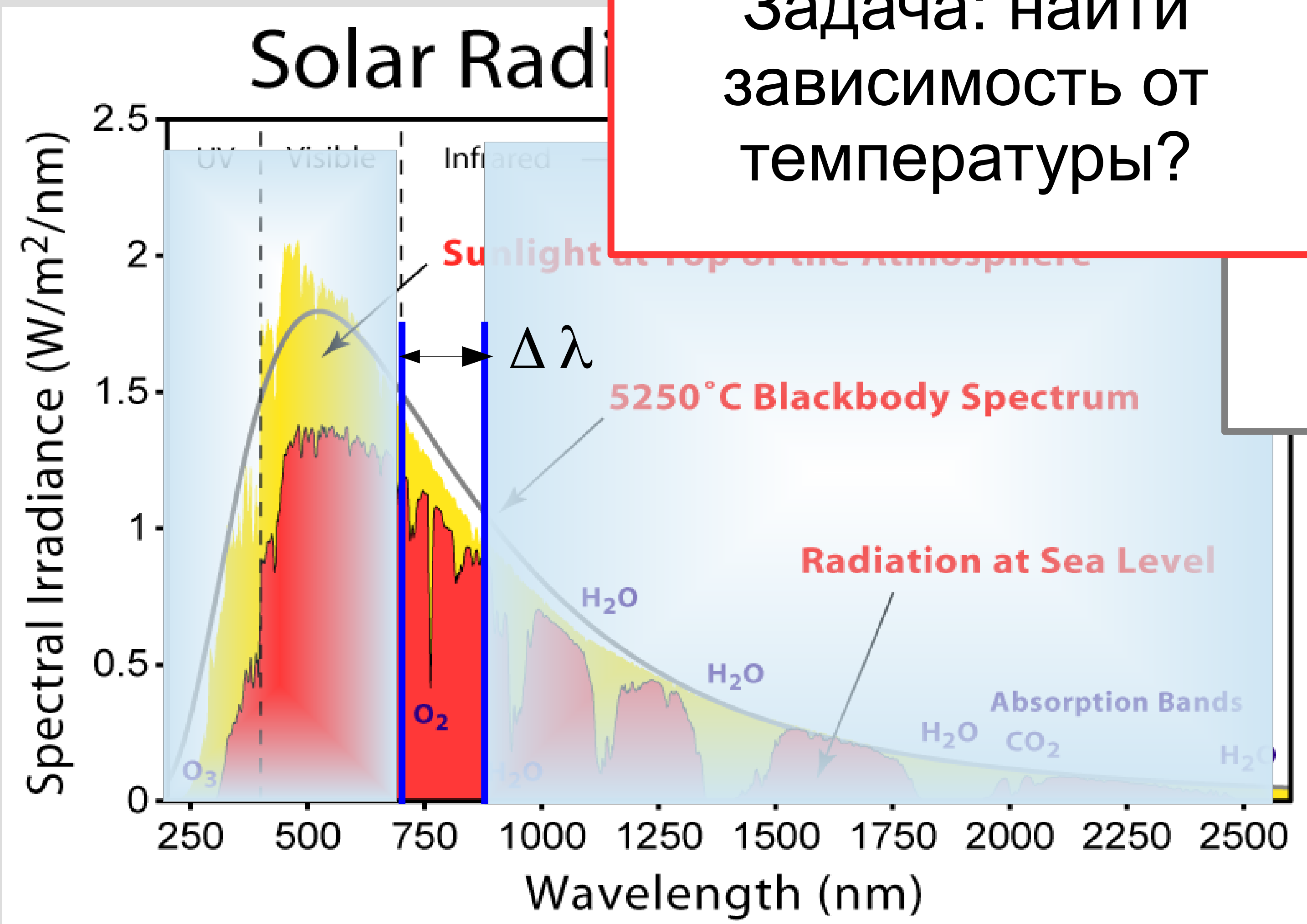
$$\rho(\omega)=\frac{\Delta W}{\Delta\omega}$$

$$\rho(\lambda)=\frac{\Delta W}{\Delta\lambda}$$

$$W=\int\rho(\omega)d\omega$$

wikipedia.org: Solar Spectrum

Спектральная плотность излучения



Задача: найти зависимость от температуры?

$$\rho(\omega) = \frac{\Delta W}{\Delta \omega}$$

$$\rho(\lambda) = \frac{\Delta W}{\Delta \lambda}$$

$$W = \int \rho(\omega) d\omega$$

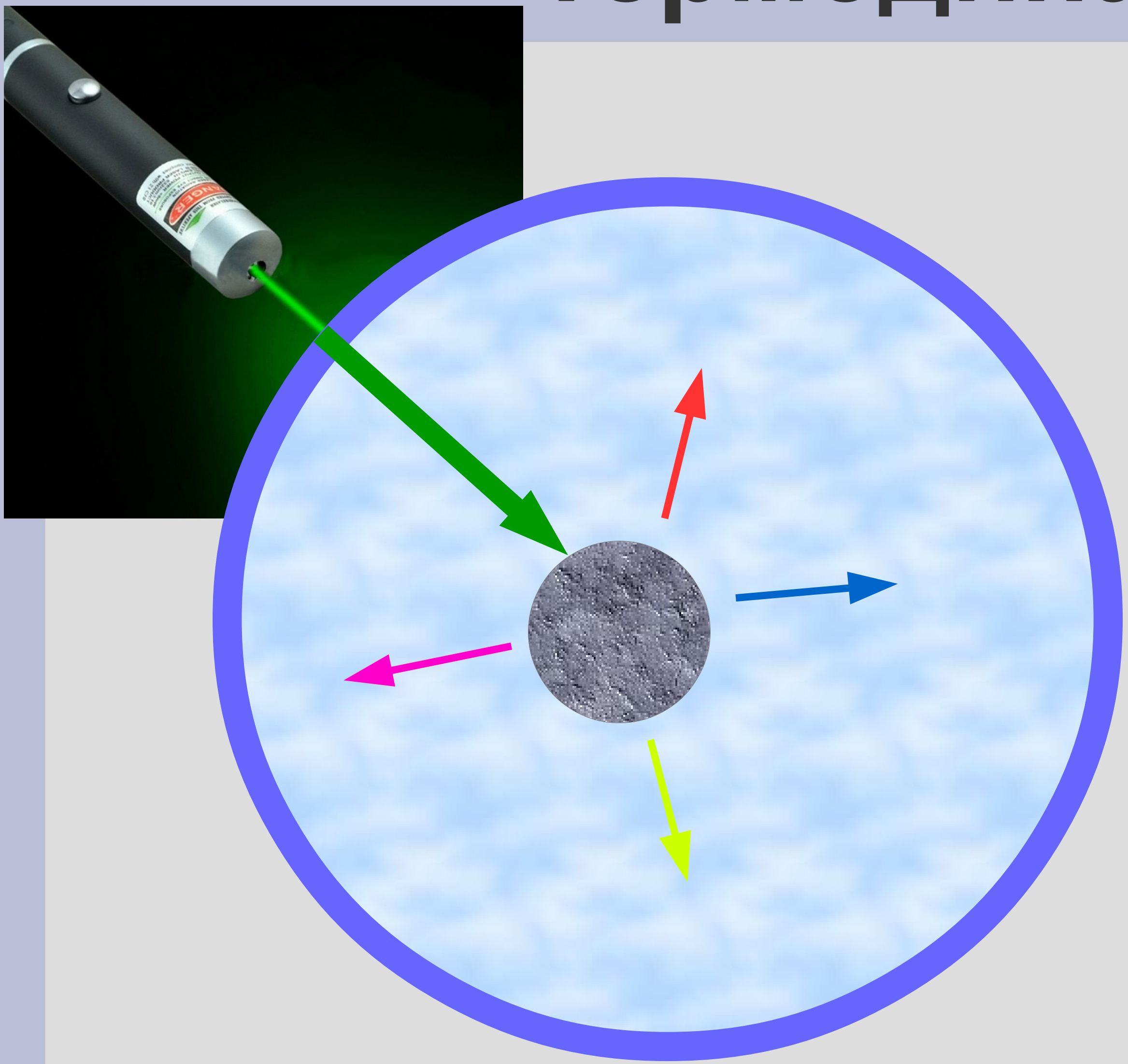
wikipedia.org: Solar Spectrum

Немного определений и термодинамики

https://youtu.be/ksItKtPkGzU

Абсолютно чёрное тело поглощает всё падающее на него излучение.

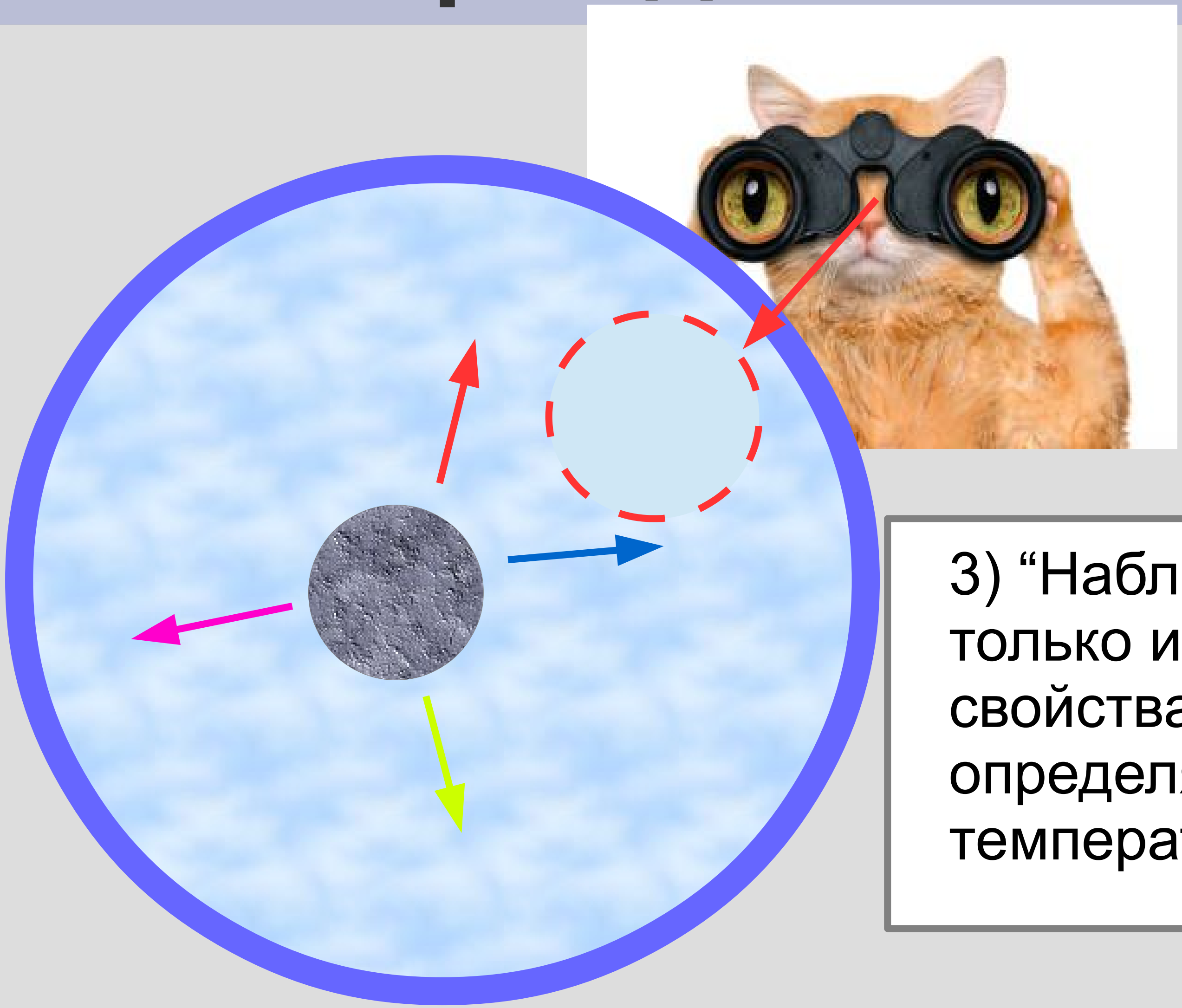
Немного определений и термодинамики



1) Поглощаемая мощность переизлучается

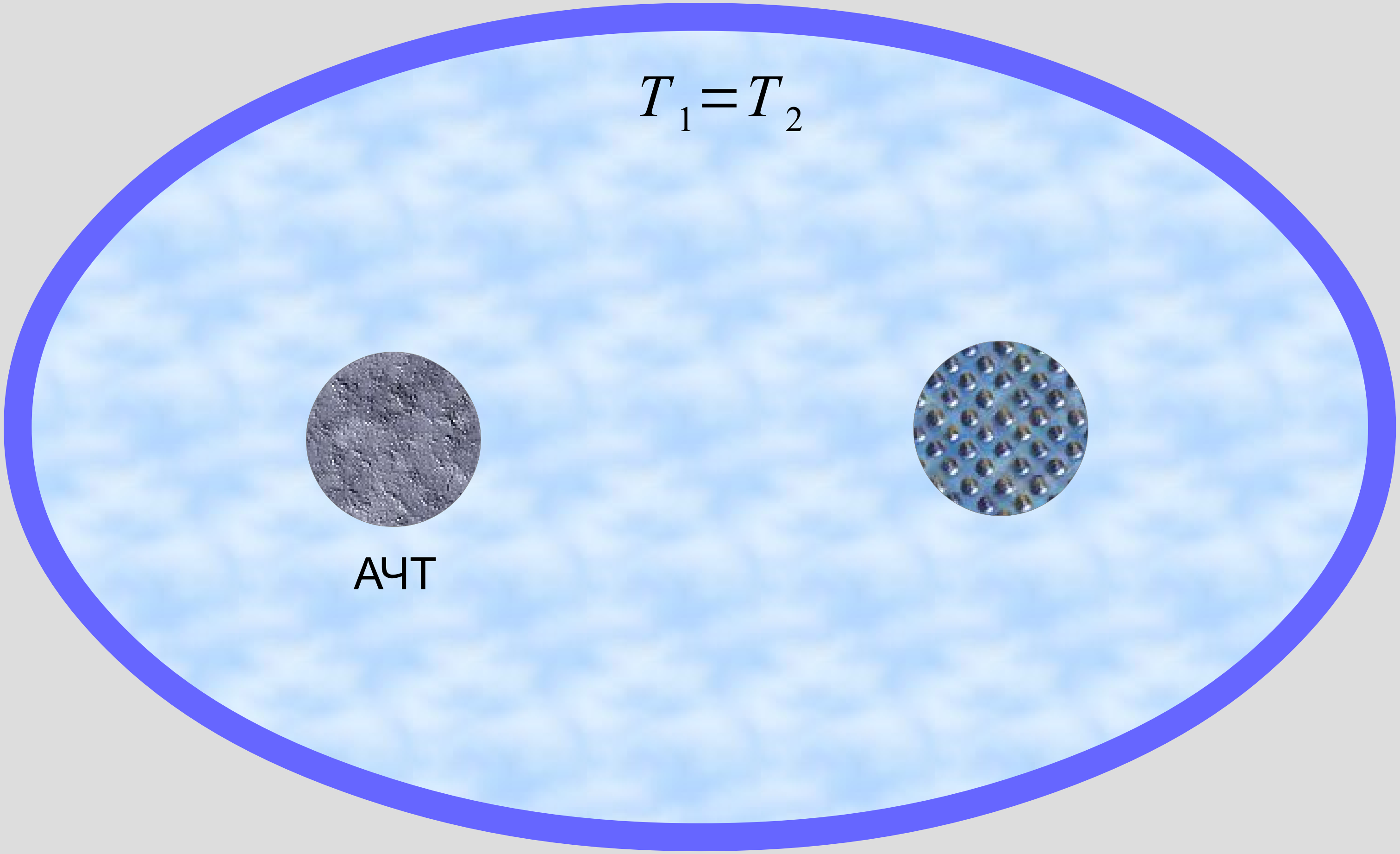
2) В отсутствие внешнего источника установится тепловое равновесие между телом и электромагнитным излучением

Немного определений и термодинамики



3) “Наблюдатель” изучает только излучение, все свойства которого определяются температурой T!

Немного определений и термодинамики

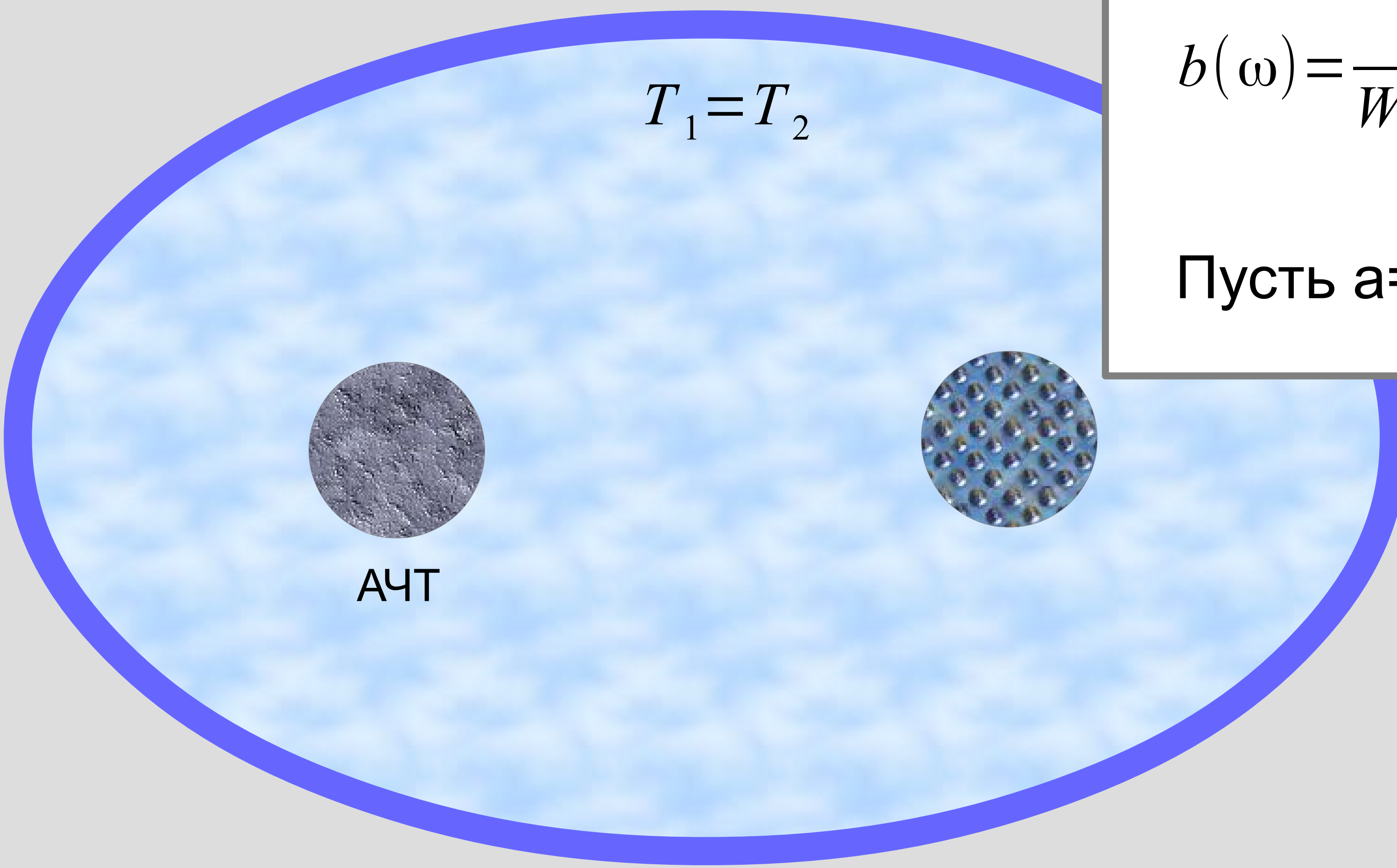


Немного определений и термодинамик

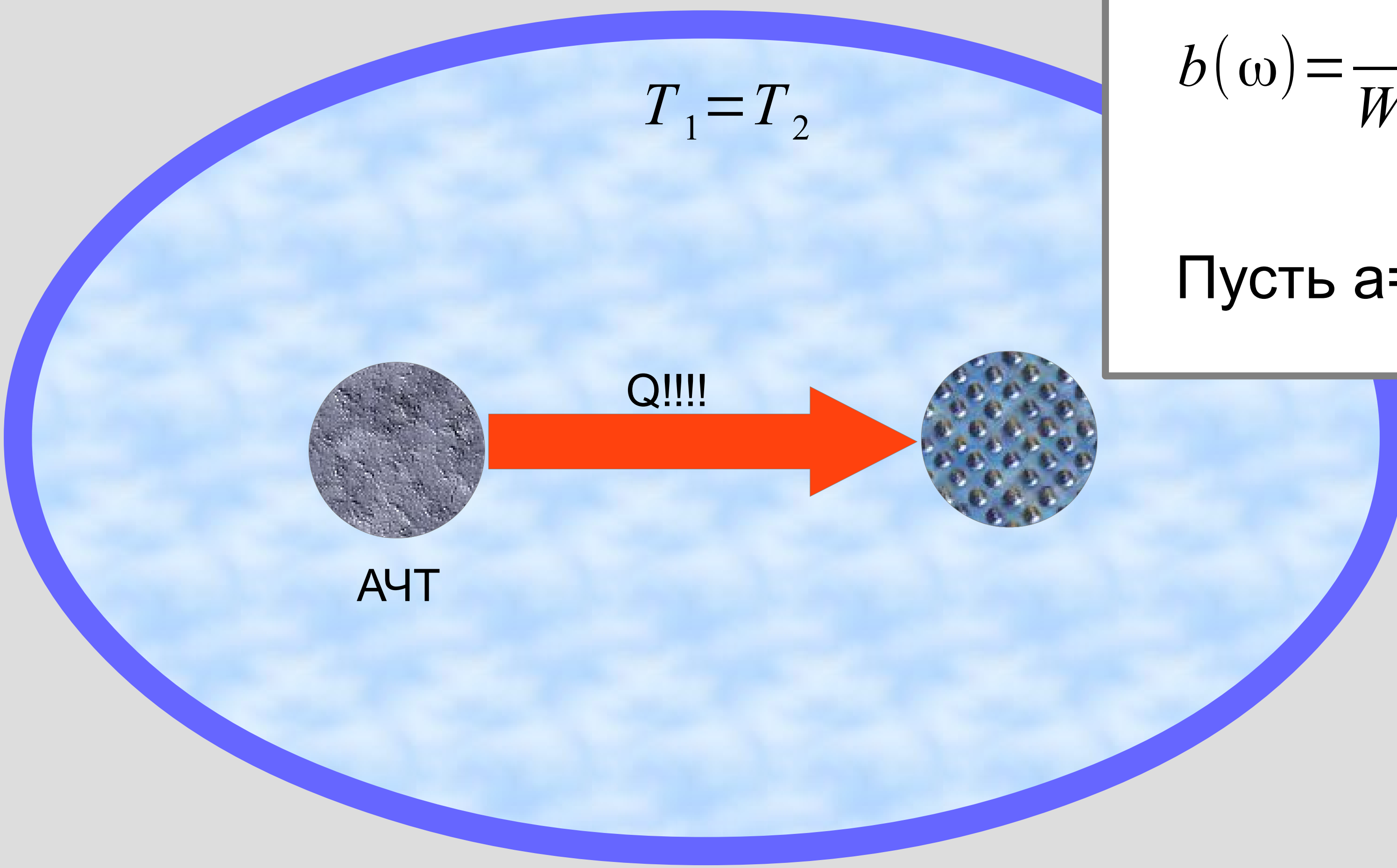
$$a(\omega)=\frac{W_{погл}}{W_{АЧТ,погл}}$$

$$b(\omega)=\frac{W_{изл}}{W_{АЧТ,изл}}$$

Пусть a=1, b=0....



Немного определений и термодинамик



$$a(\omega) = \frac{W_{погл}}{W_{АЧТ,\,погл}}$$

$$b(\omega) = \frac{W_{изл}}{W_{АЧТ,\,изл}}$$

Пусть a=1, b=0....

Немного определений и термодинамик

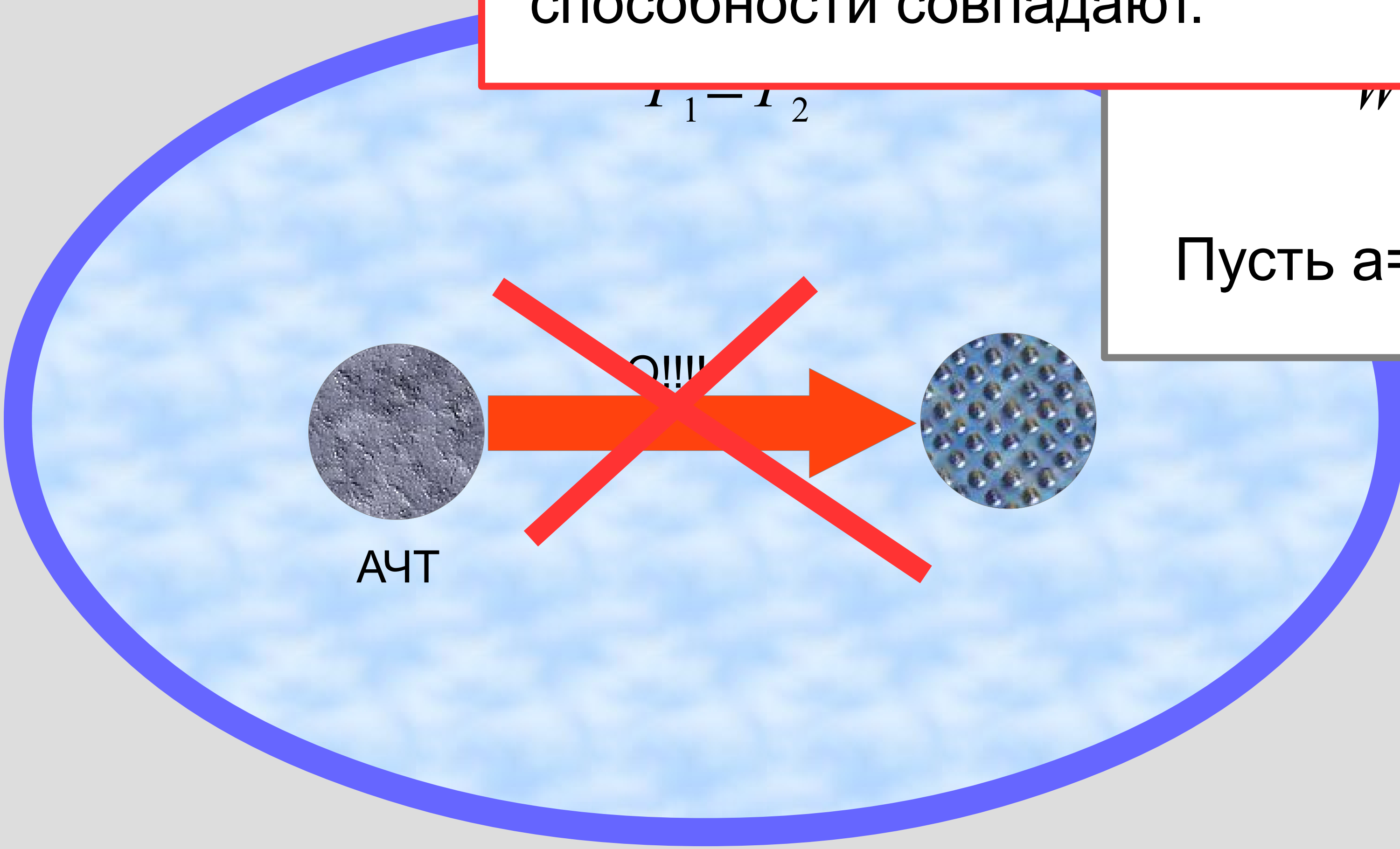
$$a(\omega)=\frac{W_{погл}}{W \ldots}$$

Излучательная и поглощательная способности совпадают.

$$T_1=T_2$$

$$W_{АЧТ,\,изл}$$

Пусть a=1, b=0....

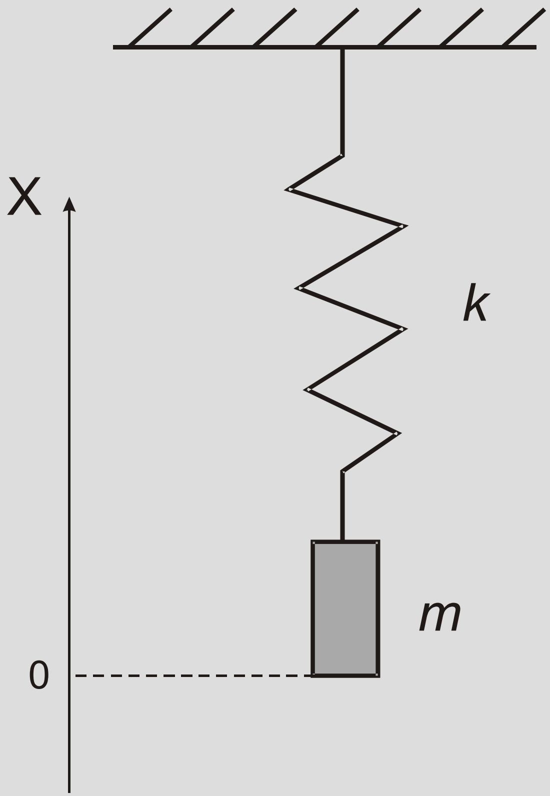


Контрольный вопрос

https://www.youtube.com/watch?v=aFYMnlVrJnQ

Какая максимальная температура может быть достигнута в фокусе “солнечного зеркала”?

Промежуточная задача 1: гармонический осциллятор



https://www.youtube.com/watch?v=z5VgYqKJ71w

$$\frac{mV^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=const$$

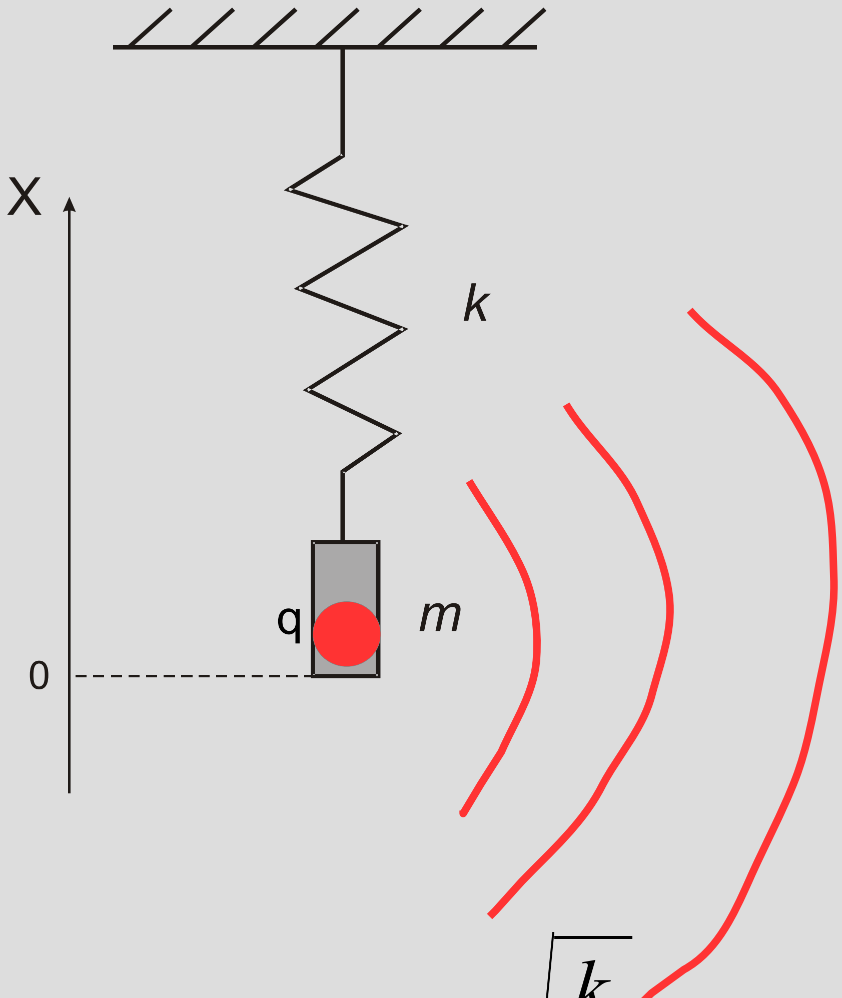
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}+\frac{kx^2}{2}\right)=0$$

$$m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+kx\frac{dx}{dt}=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

$$\boxed{\begin{gathered} x=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t) \\ \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \end{gathered}}$$

Осциллятор+заряд=потери
Потери+гипотеза Планка = ?



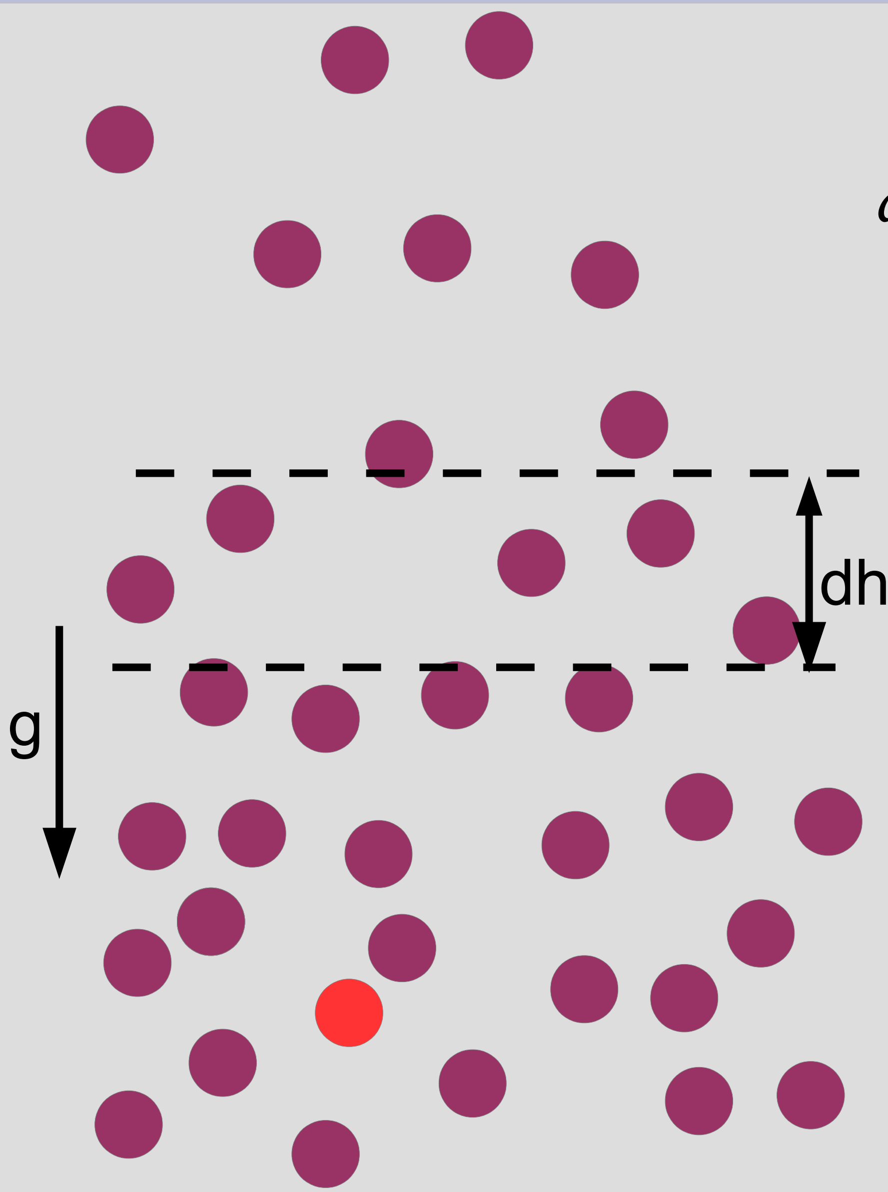
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E_n = n\hbar\omega_0 + E_0$$

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}$$

Энергия квантового осциллятора может принимать только дискретные значения!

Промежуточная задача 2: барометрическая формула



$$P = nkT$$

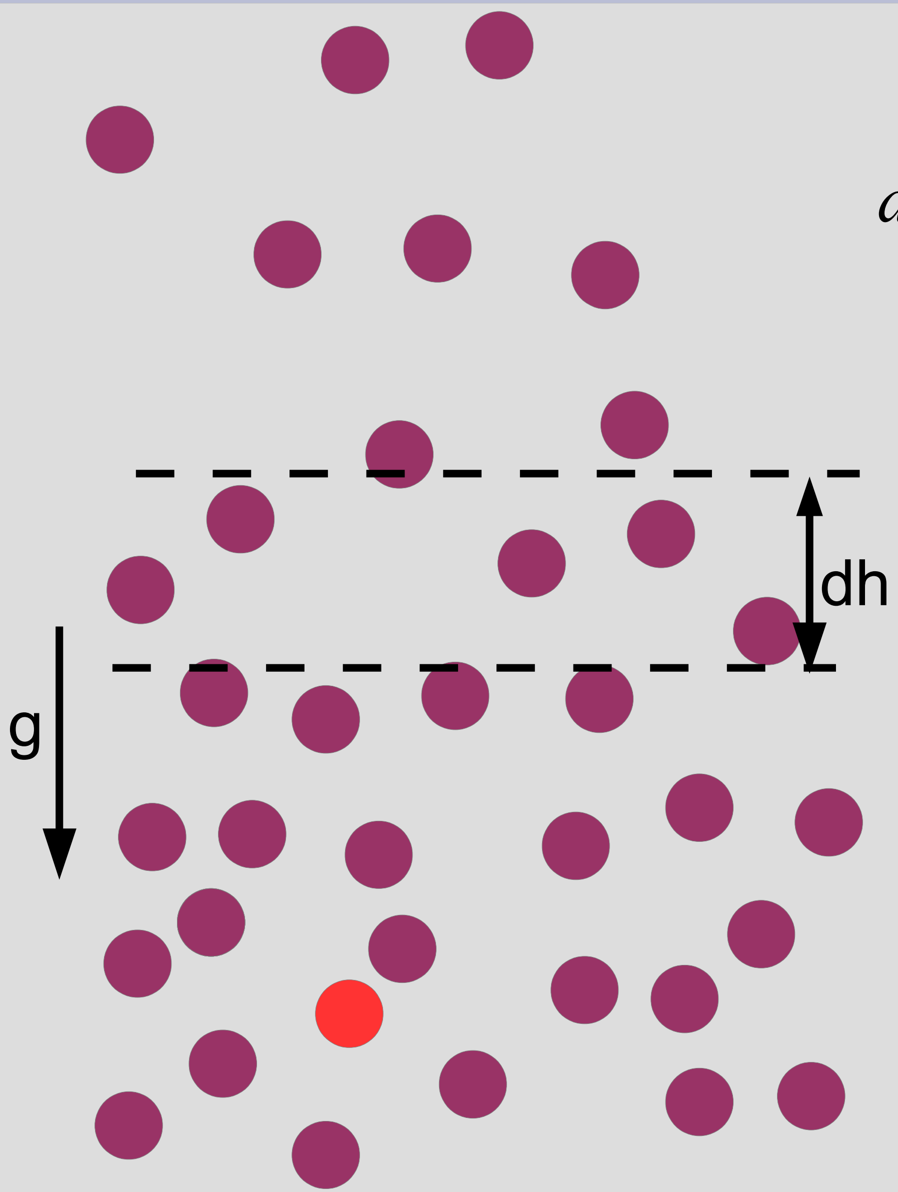
$$dP = -\rho g\, dh = -m n g\, dh = -\frac{mg}{kT} P\, dh$$

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{mg}{kT} P$$

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$$

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$$

Промежуточная задача 2: барометрическая формула



$$P = nkT$$

$$dP = -\rho g\, dh = -m n g\, dh = -\frac{mg}{kT} P\, dh$$

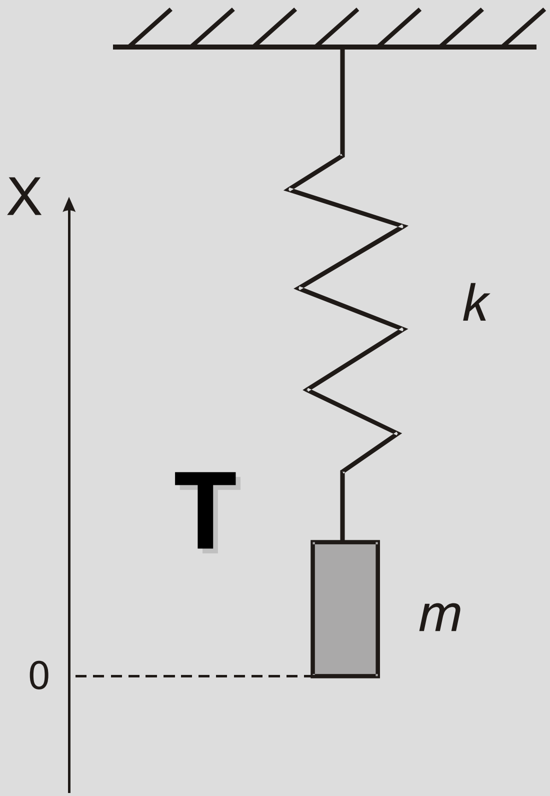
$$\frac{dP}{dh} = -\frac{mg}{kT} P$$

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$$

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$$

$$\boxed{w = A \times \exp\left(-\frac{U}{kT}\right)}$$

Промежуточная задача 3: средняя энергия квантового осциллятора



$$E_n = n\hbar\omega_0 + \cancel{E_0}$$

выбор начала отсчёта энергии

$$w_n = A \cdot \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)$$

распределение Больцмана

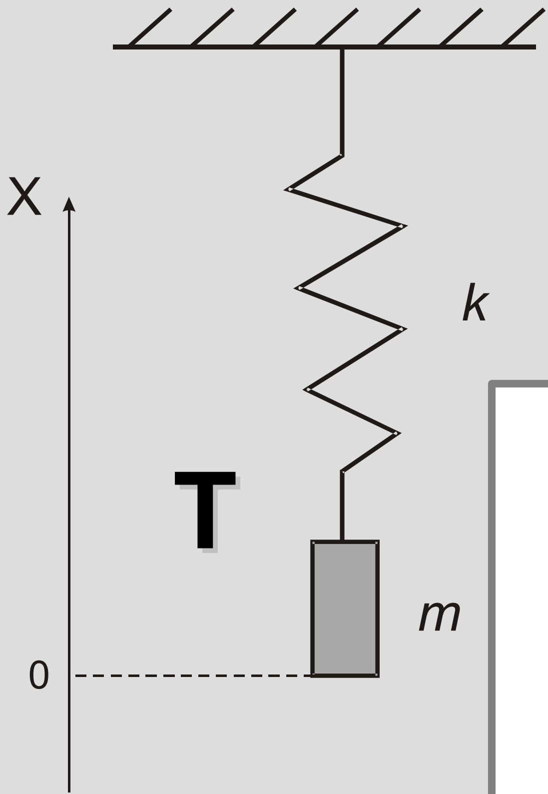
$$\sum w_n = 1$$

нормировка

$$\underline{A \sum \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 n}{kT}\right) = 1}$$

сумма убывающей геометрической прогрессии

Промежуточная задача 3: средняя энергия квантового осциллятора



$$E_n = n\hbar\omega_0 + \cancel{E_0}$$

выбор начала отсчёта энергии

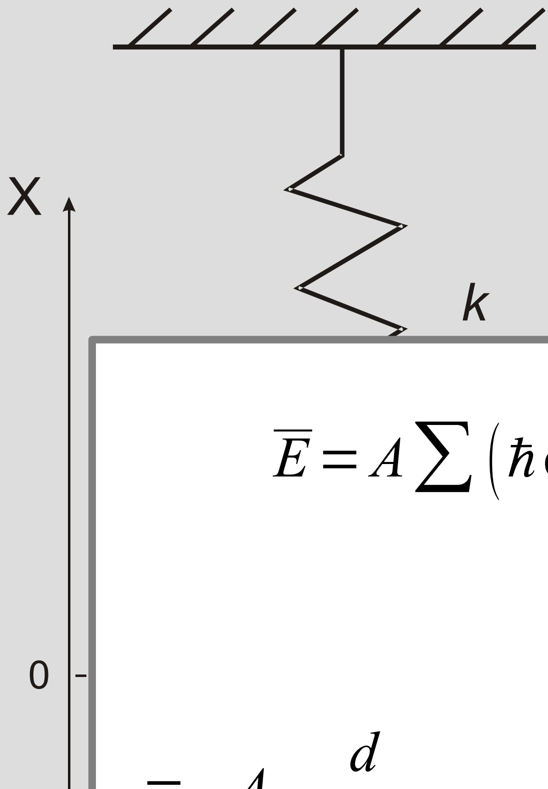
$$w_n = A\cdot\exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)$$

распределение Больцмана

$$A\cdot\frac{1}{1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)} = 1$$

$$A = 1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)$$

Промежуточная задача 3: средняя энергия квантового осциллятора



$$E_n = n\hbar\omega_0 + \cancel{E_0}$$

выбор начала отсчёта энергии

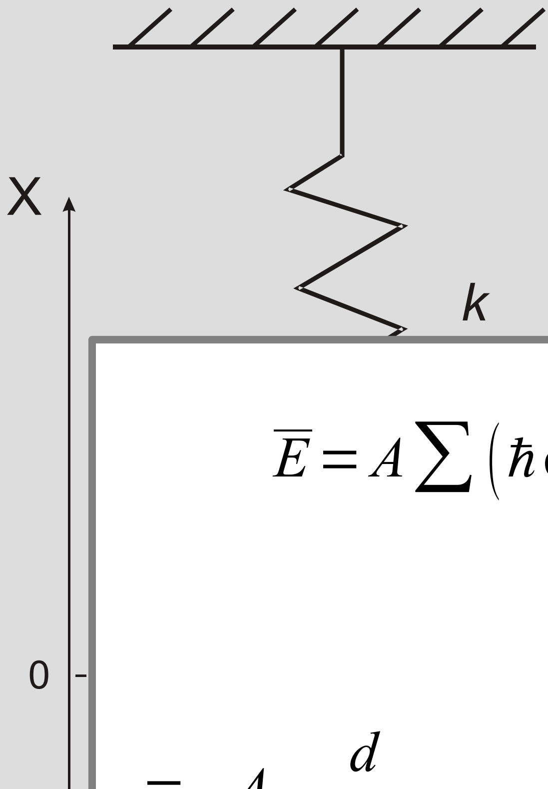
$$w_n = A\cdot\exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)$$

распределение Больцмана

$$\overline{E} = A\sum\left(\hbar\omega_0 n\right)\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 n}{kT}\right) = -A\frac{d}{d\left(\frac{1}{kT}\right)}\sum\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 n}{kT}\right) =$$

$$= -A\frac{d}{d\left(\frac{1}{kT}\right)}\frac{1}{1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)} = A\ \hbar\omega_0\ \frac{\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)}{\left(1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)\right)^2} = \frac{\hbar\omega_0}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)-1}$$

Промежуточная задача 3: средняя энергия квантового осциллятора



$$E_n = n\hbar\omega_0 + \cancel{E_0}$$ *выбор начала отсчёта энергии*

$$w_n = A\cdot\exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)$$ распределение Больцмана

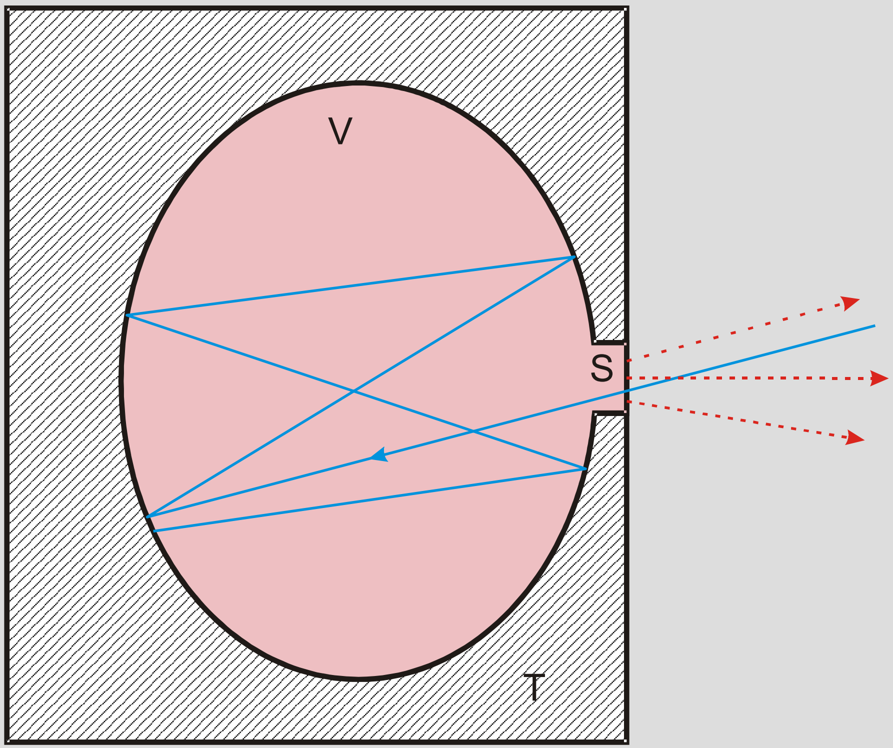
$$\overline{E} = A\sum(\hbar\omega_0 n)\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 n}{kT}\right) = -A\frac{d}{d\left(\frac{1}{kT}\right)}\sum\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 n}{kT}\right) =$$

$$= -A\frac{d}{d\left(\frac{1}{kT}\right)}\frac{}{1-\text{ex}\ldots} \ldots = \frac{\hbar\omega_0}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)-1}$$

Средняя энергия осциллятора

$$\overline{E} = \frac{\hbar\omega_0}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)-1}$$

Модель АЧТ



Удобная модель АЧТ:

- Всякое падающее в отверстие извне излучение поглощается
- Внутри полости есть излучение, находящееся в тепловом равновесии со стенками при температуре T
- Это равновесное излучение “высвечивается” в отверстие

Стоячие волны

https://www.youtube.com/watch?v=no7ZPPqtZEg

Условие формирования стоячей волны: целое число полуволн укладывается на длине струны.

$$N\frac{\lambda}{2}=L$$

Полость микроволновки – трёхмерный резонатор для электромагнитных волн.

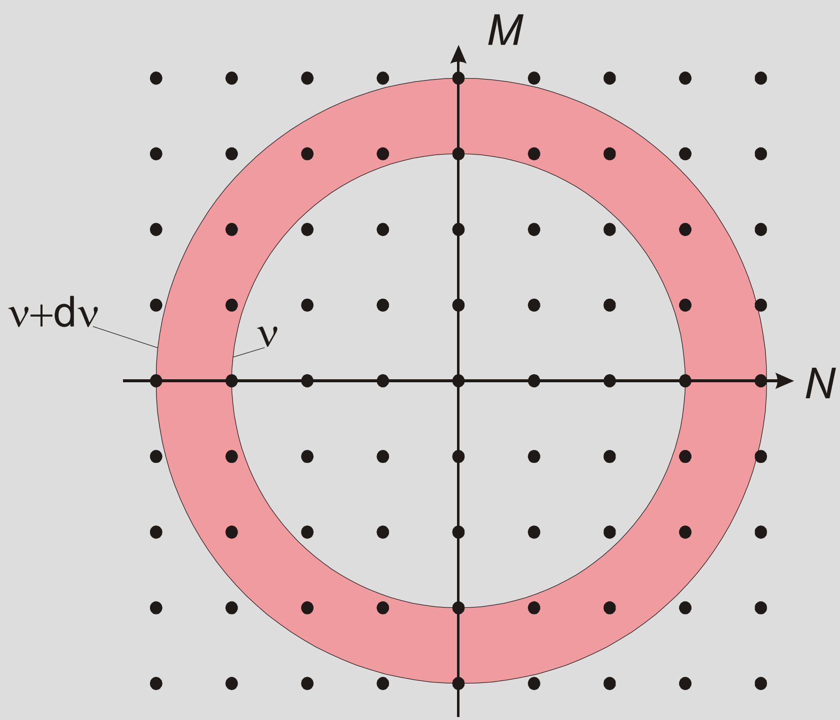
http://www.pngpix.com/download/tag/microwave-oven

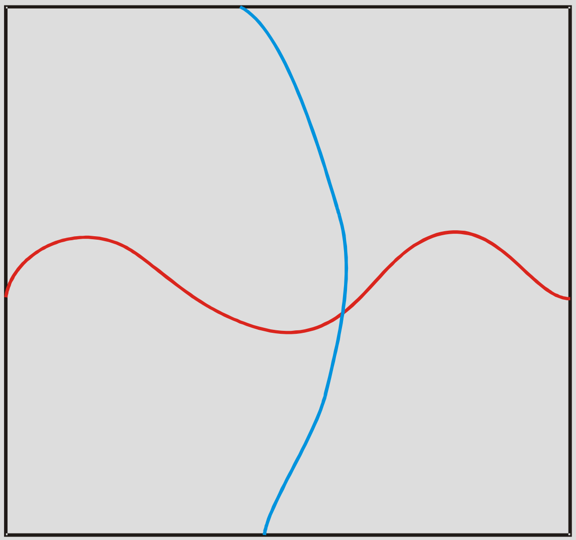
Частоты прямоугольного резонатора

$$N\frac{\lambda_x}{2}=L_x;\,M\frac{\lambda_y}{2}=L_y;\,P\frac{\lambda_z}{2}=L_z$$

$$N,M,P\geq 0$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_x}\right)^2+\left(\frac{1}{\lambda_y}\right)^2+\left(\frac{1}{\lambda_z}\right)^2=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\left(\frac{\nu}{c}\right)^2$$





$$N^2+M^2+P^2=4L^2\left(\frac{\nu}{c}\right)^2$$

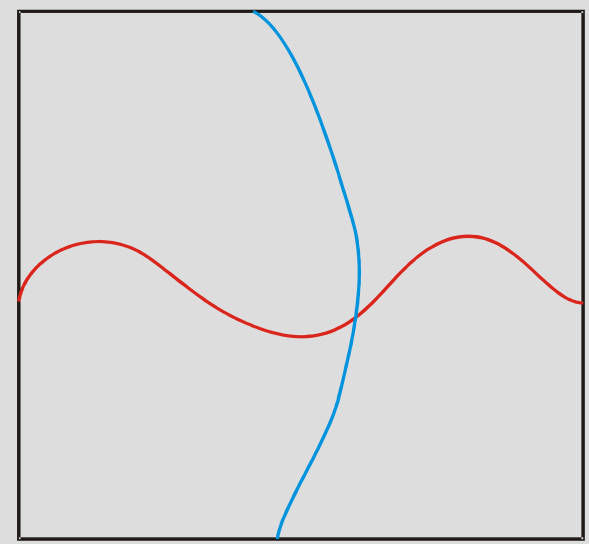
Частоты прямоугольного резонатора

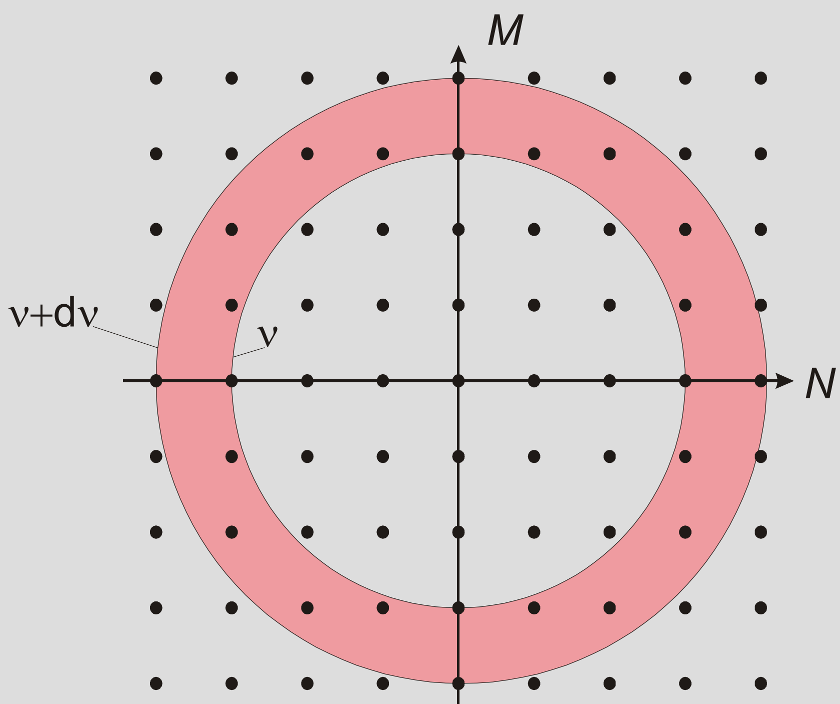
$d\nu$

$$N\frac{\lambda_x}{2}=L_x;\,M\frac{\lambda_y}{2}=L_y;\,P\frac{\lambda_z}{2}=L_z$$

$$N,M,P\geq 0$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_x}\right)^2+\left(\frac{1}{\lambda_y}\right)^2+\left(\frac{1}{\lambda_z}\right)^2=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\left(\frac{\nu}{c}\right)^2$$





$$N^2+M^2+P^2=4L^2\left(\frac{\nu}{c}\right)^2$$

уравнение сферы радиуса $R=2\mathrm{L}\dfrac{\nu}{c}$

Частоты прямоугольного

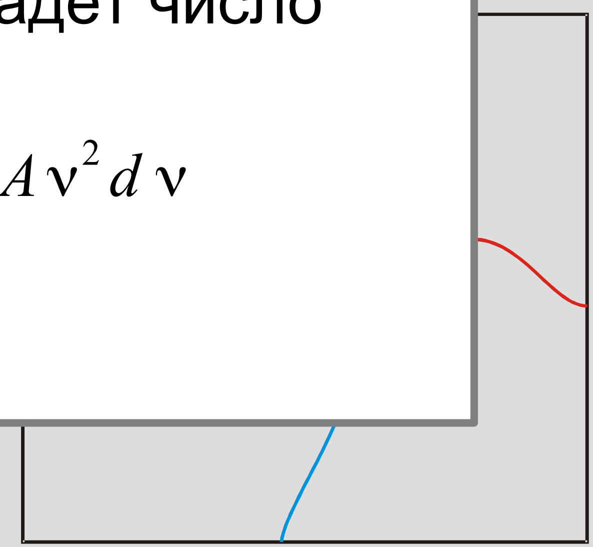
при изменении частоты на $d\nu$

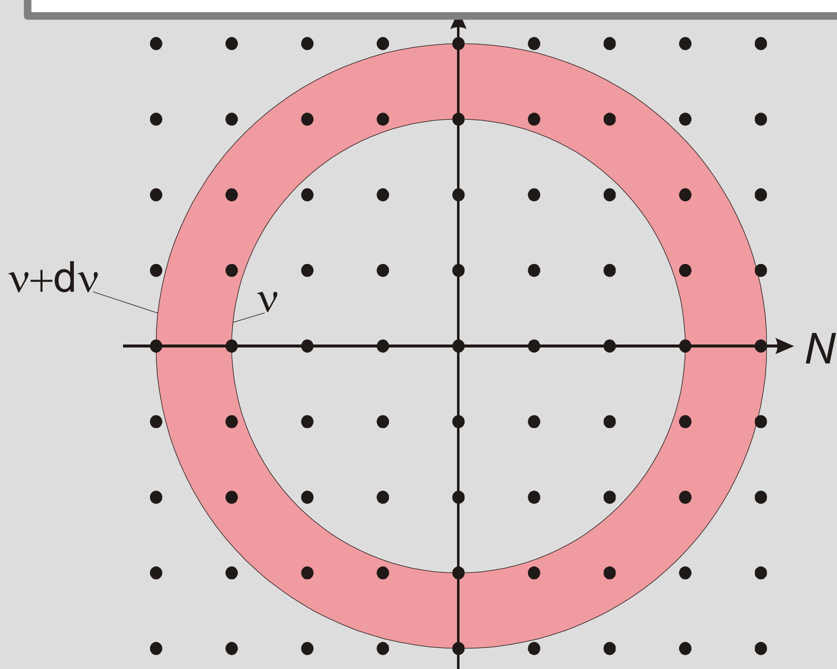
в 1/8 сферического слоя попадёт число точек

$$dN = \frac{1}{8} 4\pi R^2 dR / 1 = A \nu^2 d\nu$$

$N\frac{\lambda}{2}$

$\left(\frac{1}{\lambda_x}\right)$

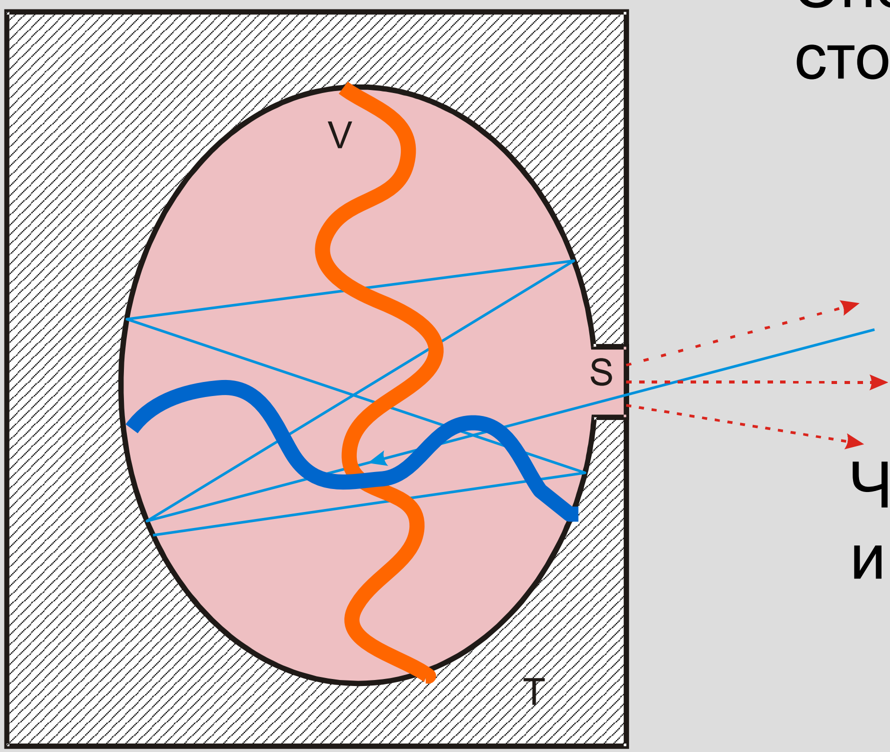




$$N^2 + M^2 + P^2 = 4L^2\left(\frac{\nu}{c}\right)^2$$

уравнение сферы радиуса $R = 2L\frac{\nu}{c}$

Плотность энергии равновесного излучения в полости



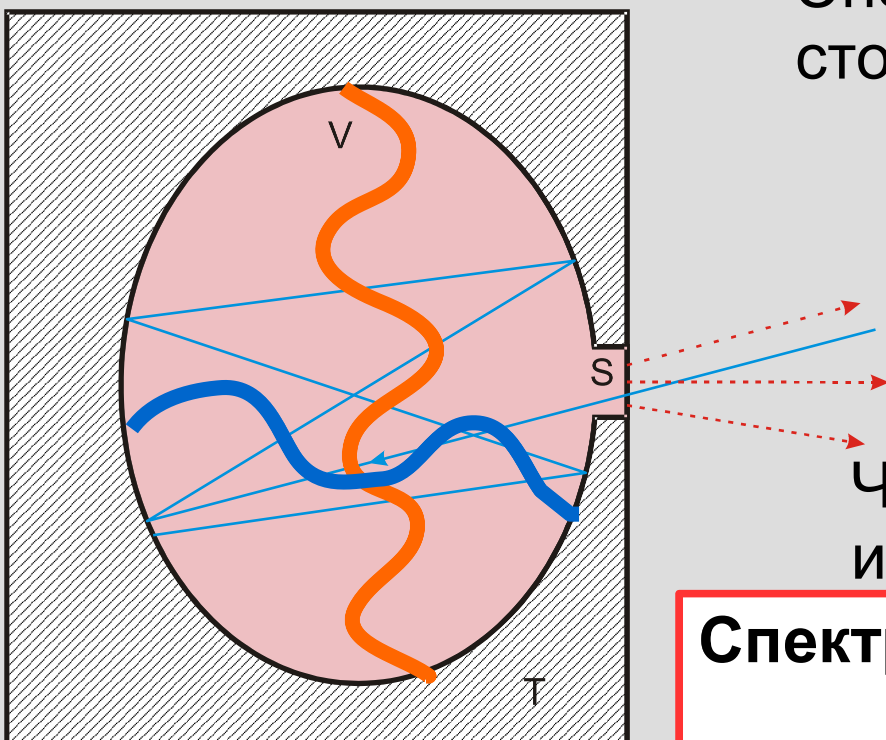
Энергия, запасённая в каждой стоячей волне изменяется квантами.

$$\overline{E} = \frac{\hbar\omega_0}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right) - 1}$$

Число типов стоячих волн в интервале частот:

$$dN = A\nu^2 d\nu$$

Плотность энергии равновесного излучения в полости



Энергия, запасённая в каждой стоячей волне изменяется квантами.

$$\overline{E} = \frac{\hbar\omega_0}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right) - 1}$$

Число типов стоячих волн в интервале частот:

Спектральная плотность энергии

$$\frac{dE}{d\nu} = B\frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

Законы теплового излучения

$$\frac{dE}{d\nu}=B\frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}$$

Классический закон
Рэлея-Джинса

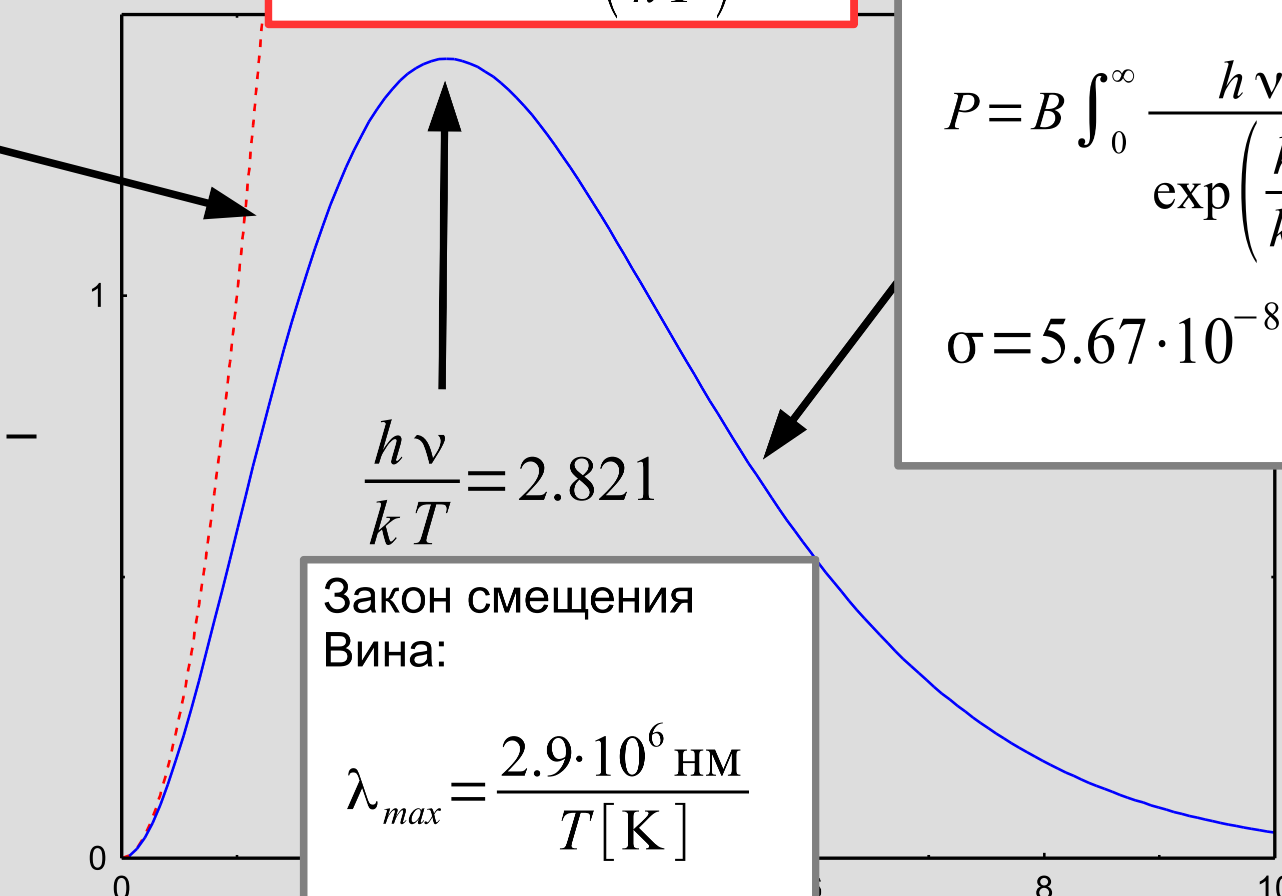
$$h\nu \ll kT$$

$$\rho \propto \nu^2 kT$$

Закон Стефана-Больцмана:

$$P=B\int_0^\infty \frac{h\nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}=\sigma T^4$$

$$\sigma=5.67\cdot 10^{-8}\frac{Вт}{м^2\cdot K^4}$$



$$\frac{h\nu}{kT}=2.821$$

Закон смещения Вина:

$$\lambda_{max}=\frac{2.9\cdot 10^6\,нм}{T[\mathrm{K}]}$$

300 К: 10 мкм
1000К: 3 мкм
6000К: 500 нм

Частота/длина волны

$$\rho(\nu) = \frac{dE}{d\nu} = B \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

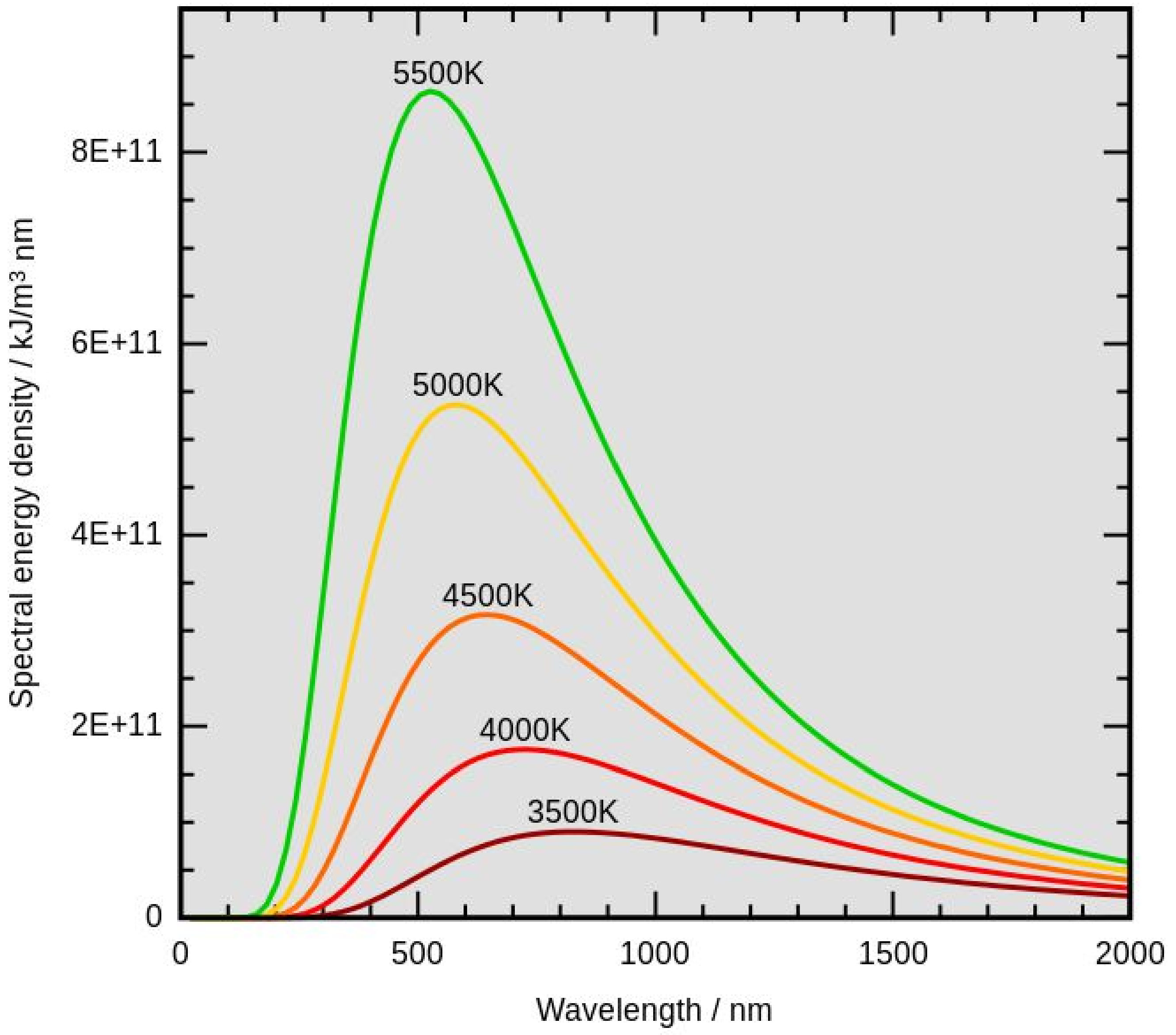
$$W = \int \rho(\nu)\, d\nu = \int \rho(\lambda)\, d\lambda$$

$$d\nu = d\left(\frac{c}{\lambda}\right) = -\frac{c\, d\lambda}{\lambda^2}$$

$$\rho(\lambda) = \tilde{B} \frac{h}{\lambda^5} \times \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}$$

Применения

https://en.wikipedia.org/wiki/Wien%27s_displacement_law#/media/File:Wiens_law.svg

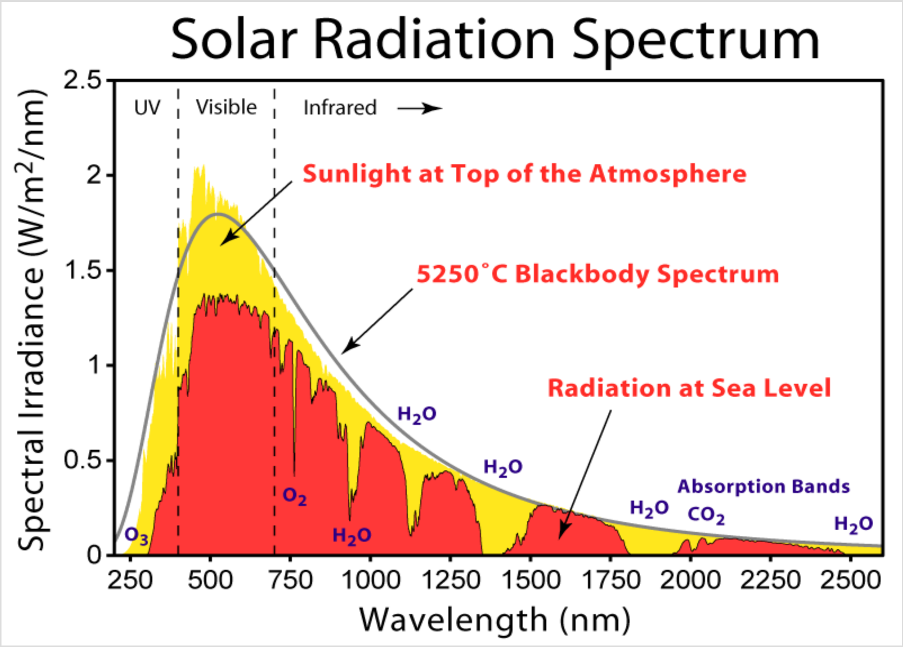


Пирометрия: бесконтактное измерение температуры по спектру и интенсивности

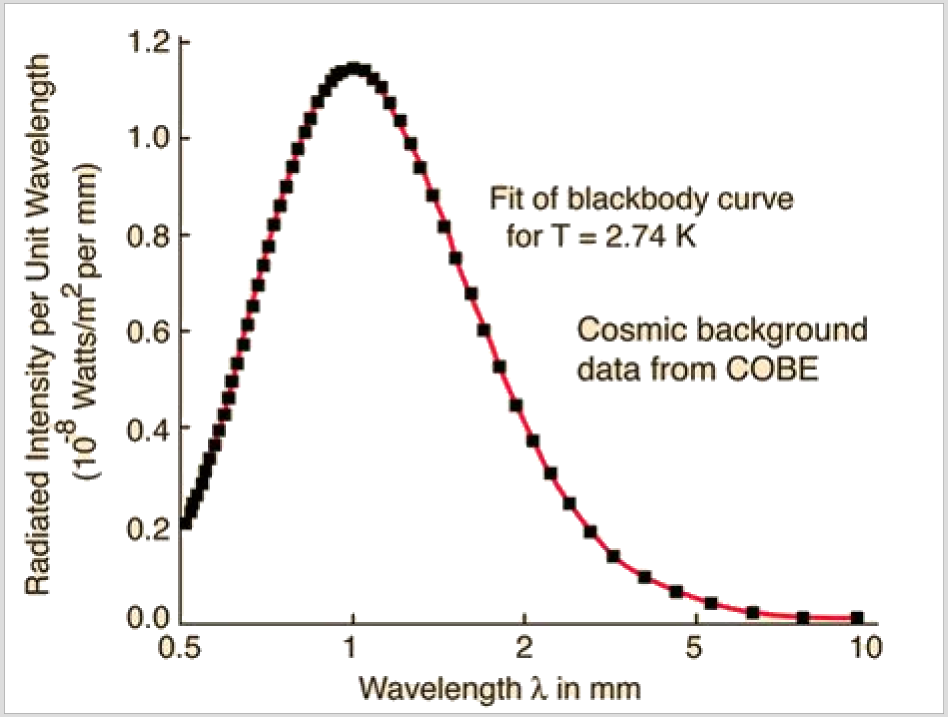
Термос

Идеально зеркальная поверхность не поглощает – **<u>и не излучает!</u>**

Спектры в астрономии



wikipedia.org:
Solar Spectrum



(источник: Hyperphysics Project)

Последствия гипотезы Планка для классической физики

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$ 2-й закон Ньютона

$$E=E\left(\{\vec{r}_i,\vec{p}_i\}\right)=K\left(\{\vec{p}_i\}\right)+\Pi\left(\{\vec{r}_i\}\right)$$

$$\vec{F}_i=-\frac{\partial\Pi\left(\{\vec{r}_i\}\right)}{\partial\vec{r}_i}$$

$$K\left(\{\vec{p}_i\}\right)=\sum\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2\mathrm{m}}$$

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt}=-\frac{\partial E\left(\{\vec{r}_i,\vec{p}_i\}\right)}{\partial\vec{r}_i}$$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\vec{V}_i=\frac{\partial K\left(\{\vec{p}_i\}\right)}{\partial\vec{p}_i}=\frac{\partial E\left(\{\vec{r}_i,\vec{p}_i\}\right)}{\partial\vec{p}_i}$$

Уравнения Гамильтона

Последствия гипотезы Планка для классической физики

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$ 2-й закон Ньютона

Уравнения Гамильтона подразумевают дифференцируемость и следовательно непрерывнось энергии, а по гипотезе Планка энергия меняется дискретно! Гипотеза Планка не может быть включена в рамки классической теории.

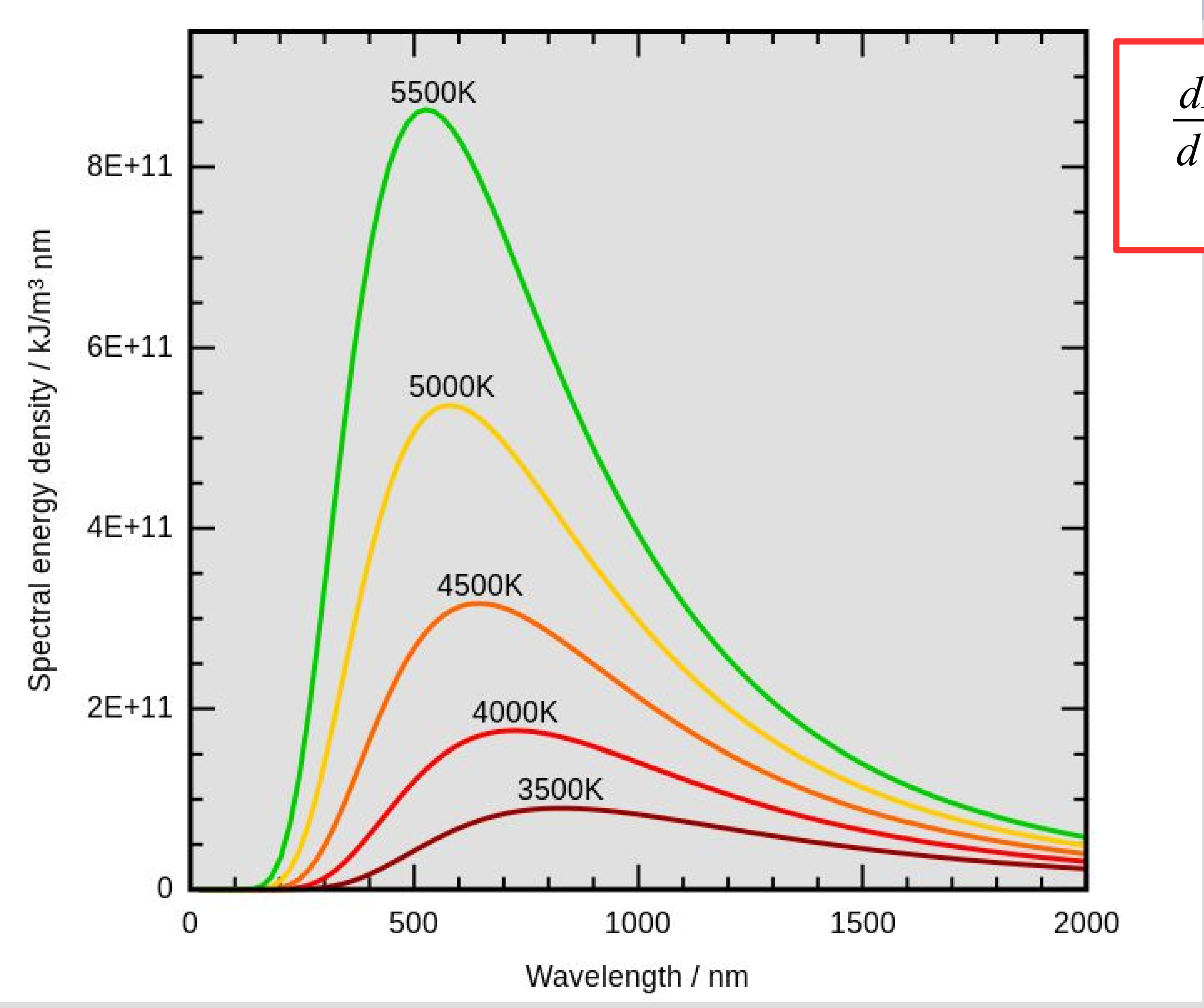
$$\vec{F}_i = -$$

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = -\frac{\partial E(\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\})}{\partial \vec{r}_i}$$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{V}_i = \frac{\partial K(\{\vec{p}_i\})}{\partial \vec{p}_i} = \frac{\partial E(\{\vec{r}_i, \vec{p}_i\})}{\partial \vec{p}_i}$$

Уравнения Гамильтона

Выводы



$$\frac{dE}{d\nu} = B \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

Задачи домашнего задания

Задача 1

Известно, что мощность солнечного излучения при входе в атмосферу Земли составляет примерно 1400 Вт/м^2. Из эйнштейновской эквивалентности массы и энергии, оцените скорость уменьшения массы (“худения”) Солнца. Расстояние от Солнца до Земли принять равным 150 млн. км.

Задача 2

Шар с зачерненной поверхностью находится в космическом пространстве на некотором расстоянии r от Солнца. Найти равновесную температуру шара, если он находится от Солнца на расстояниях, равных радиусам орбит Венеры, Земли, Марса и Юпитера, равных (в млн. км) $r_в=108$, $r_з=150$, $r_м=228$, $r_ю=780$. Солнце считать источником равновесного теплового излучения с температурой $T_C=6000$ К и радиусом $R_C=710000$ км. Считать, что вся поверхность шара имеет одинаковую температуру.

Сравнить полученные величины со средними температурами освещенной части поверхностей планет Венеры, Земли, Марса и Юпитера: $T_В=735\,K$, $T_З=275\,K$, $T_М=235\,K$, $T_Ю=135\,K$. Чем можно объяснить большое расхождение рассчитанной таким образом и полученной в измерениях температуры поверхности Венеры?