

ДЕВЯТОВ Эдуард Валентинович

**Основы физики низкоразмерных систем и режима квантового эффекта
Холла.**

Методическое пособие для студентов ФОПФ 6 семестра общей физики

Глава 1

Введение

Представленные ниже главы по объёму соответствуют примерно четырём лекциям курса общей физики, предназначенных для студентов третьего года обучения. К этому моменту предполагается, что студенты владеют основами квантовой механики в курсе общей физики, а возможно (и желательно) - и в курсе теоретической физики, в объёме первой половины 3 тома курса Ландау и Лифшица, как это предусмотрено программой для студентов ФОПФ 3 курса МФТИ.

Целью данных лекций является необходимость дать представление о круге явлений и понятий, называемых физикой низкоразмерных систем и являющейся разделом современной физики твёрдого тела. Являясь частью курса общей физики, данные лекции не претендуют на полноту охвата явлений - рассматриваются лишь основные, по мнению автора, понятия, знание которых необходимо для квалифицированного физика-исследователя независимо от специализации. Так же данные лекции могут помочь с выбором конкретной специализации и служить введением в специальные курсы физики твёрдого тела. По этой причине список литературы состоит в основном из тех источников, обращение к которым должно помочь сформировать общее представление о проблеме. Обычно это статьи обзорного плана, где и следует искать ссылки на оригинальные работы и указание на приоритет тех или иных групп и исследователей.

Глава 2

Низкоразмерные системы, их типы и основные характеристики

2.1 Критерии низкоразмерности.

В наше время уже почти полностью сошла на нет шумиха, связанная с приставкой "нано" и словом "нанотехнологии". Уже никто не предлагает выполненные по нанотехнологиям кирпичи, носки и т.п. остались, и развиваются, сами нанотехнологии, если понимать это слово как использование в технике, а соответственно и в прикладных или фундаментальных научных исследованиях систем пониженной размерности.

Прежде всего стоит определиться с понятиями – что мы имеем в виду, когда говорим о низкоразмерной системе. Соответствующие критерии зависят от конкретной физической задачи, и, соответственно, могут быть очень разными. Рассмотрим в качестве примера двумерную электронную систему, например, металлическую пленку. Размеры ее в плоскости считаем бесконечными и будем постепенно уменьшать толщину d . Есть несколько различных характерных пространственных масштабов, которые будет пересекать d по мере уменьшения.

2.1.1 Длина сбоя фазы.

Наиболее крупным из них является длина сбоя фазы. Волновую функцию свободно движущегося в пленке электрона можно представлять себе (с ограничениями, обсуждаемыми ниже) как волну де Бройля с определенной энергией и импульсом. Рассеяние электрона на примесях с хорошей точностью упругое и, сохраняя модуль упомянутых величин, изменяет направление импульса. Однако любой акт неупругого рассеяния приведет к сбою фазы волновой функции. Поэтому движение электрона качественно можно себе представлять как диффузию с сохранением фазы между актами сбоя фазы волновой функции. Таким образом, пока расстояние, на которое диффундирует электрон (длина сбоя фазы), меньше чем толщина пленки, система трехмерна. В обратном предельном случае система будет себя вести как двумерная для эффектов, в которых существенна интерференция между электронами (требующая естественно фазовой когерентности), например, интерференционные поправки к проводимости – так называемая слабая локализация. Рассмотрение такого рода эффектов сильно выходит за рамки курса общей физики, как в силу используемого математического аппарата, так и в силу малости соответствующих эффектов.

2.1.2 Длина свободного пробега.

Следующим пространственным масштабом является длина свободного пробега l (расстояние, проходимое электроном между двумя актами рассеяния). Если $l > d$ и пленка идеально плоско параллельная, то при движении в z - направлении электрон будет чувствовать обе границы. Как при движении во всяком потенциальном ящике, электронный спектр станет дискретным и во всех эффектах, в которых дискретность спектра существенна, электронная система должна рассматриваться как двумерная.

Такого рода двумерность часто возникает в задачах связанных с сильно анизотропной проводимостью (слоистые соединения, состоящие из параллельных, слабо между собой связанных, хорошо проводящих плоскостей – к ним относятся многие соединения ВТСП), поверхностные проводящие слои на поверхности трёхмерных систем – висмута, германия, и т.п. Основное отличие таких систем от рассматриваемых в следующем пункте – то, что заполнено как минимум несколько подзон размерного квантования.

2.1.3 Нижние подзоны размерного квантования.

Наконец, при дальнейшем уменьшении размера, все электроны пленки окажутся на одном энергетическом уровне по отношению к движению в z - направлении. Электронный спектр представится в виде

$$E(p) = E_0 + p^2/2m, \quad (2.1)$$

где E_0 – энергия нижней размерно квантованной подзоны, а m – электронная эффективная масса в плоскости. Казалось бы, теперь движение в направлении, нормальном плоскости пленки, полностью выпало из рассмотрения и система стала двумерной во всех смыслах. Однако, даже такие системы часто характеризуют как квазидвумерные и на это есть основания. Дело в том, что волновая функция электрона имеет конечную протяженность в направлении, нормальном плоскости пленки. Этот размер следует сравнить с характерным расстоянием между электронами в плоскости. Пока расстояние между электронами сильно превышает характерный размер волновой функции в z - направлении, взаимодействие между электронами соответствует взаимодействию между частицами в плоскости, в обратном предельном случае необходимо учитывать вероятность обнаружить электроны на разной глубине. Т.е. третье измерение выпадет не из всех эффектов.

Таким образом, не существует единого критерия двумерности, также как и одномерности или нульмерности. Критерий, во-первых, зависит от изучаемого эффекта и, вообще говоря, от температуры. В современной физике принято, если не явно не оговорено иное, считать низкоразмерными системы, демонстрирующие дискретный спектр хотя бы для одного направления движения.

2.2 Приближение прямоугольной квантовой ямы, дискретный спектр.

Раз речь зашла о размерном квантовании и дискретном спектре, необходимо хотя бы качественно пояснить механизм возникновения такого спектра. Для этого хорошо подходит модельная задача о движении электрона в прямоугольной квантовой яме с бесконечно высокими стенками (данная задача очень ясно разобрана в учебнике [1]).

Уравнение Шредингера имеет вид

$$H\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z) \quad (2.2)$$

В приближении эффективной массы переменные, соответствующие движению в разных пространственных направлениях, разделяются и нам предстоит найти решение одномерного уравнения с потенциалом:

$$U(z) = 0, |z| < L/2 \quad (2.3)$$

$$U(z) = \infty, |z| > L/2 \quad (2.4)$$

Поскольку уравнение в области нулевого потенциала имеет вид:

$$(-\hbar^2/2m^*)(d^2\psi/dz^2) = E\psi \quad (2.5)$$

а на границе из-за бесконечного потенциала волновая функция обязана обратиться в нуль, его решением будет:

$$\psi_n = \cos(k_i z), k_i = \pi(2i + 1)/L, i = 0, 1, 2, 3... \quad (2.6)$$

$$\psi_m = \sin(k_j z), k_j = \pi 2j/L, m = 1, 2, 3... \quad (2.7)$$

Все решения разделяются на симметричные относительно точки $z = 0$ и антисимметричные. Низший энергетический уровень соответствует симметричному решению с отсутствием нулей волновой функции в интервале $(-L/2, L/2)$. Далее симметричные и антисимметричные решения чередуются при возрастании энергии.

Таким образом в яме шириной L волновой вектор k может принимать только значения, кратные π/L . Тогда, разрешёнными значениями энергии будут

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2, n = 1, 2, 3... \quad (2.8)$$

Качественно, полученные результаты остаются справедливыми (в смысле наличия дискретного спектра и симметрии волновой функции) и для потенциальной ямы произвольной формы с конечной высотой стенок, поэтому данное модельное решение часто используется для грубых оценок в реальных системах.

2.3 Основные типы низкоразмерных систем. Ожидаемые условия возникновения новых физических эффектов.

Очевидно, что с точки зрения фундаментальной физики, основной интерес к низкоразмерным системам связан с возможностью получения принципиально новых физических эффектов. В этой связи представляется важным выделить те свойства разных типов низкоразмерных систем, которые оказались существенны для проявления таких эффектов.

2.3.1 Двумерные системы

В этом случае движение “заквантовано” в z направлении, в плоскости xy электроны двигаются свободно. Наиболее неожиданным свойством таких систем оказался квантовый эффект Холла, наблюдаемый в сильных (квантующих) магнитных полях. В этом случае спектр электрона представляет собой дискретные уровни энергии (уровни Ландау) [3]

$$E = \frac{|e|H}{mc} \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) + p_z^2/2m \quad (2.9)$$

где m - зонная масса, e - заряд электрона, и $n = 0, 1, 2, \dots$ - номер квантового уровня, а импульс p_z направлен по направлению магнитного поля. Если же магнитное поле перпендикулярно плоскости двумерной системы, последний член в спектре отсутствует и спектр двумерной системы в магнитном поле становится чисто дискретным. Ещё раз подчеркнём, что дискретность спектра для движения по нормали к двумерной плоскости вызвана размерным квантованием, в плоскости – квантующим магнитным полем, которое, кроме того, нарушает симметрию по отношению к обращению времени. Именно эти условия и приводят в конечном итоге к возникновению макроскопического квантового эффекта – квантованию холловского сопротивления. Подробному рассмотрению режима квантового эффекта Холла ниже посвящена отдельная глава.

2.3.2 Одномерные системы

В этом случае пространственные ограничения наложены на систему сразу в двух направлениях (например, y и z). Электроны могут свободно двигаться только вдоль оси x . На жаргоне говорят, что они могут двигаться только направо или налево, или что в одномерной системе есть правые и левые носители заряда. При этом рассеяние может как менять направление движения частиц (делает из правых левые и наоборот, так называемое рассеяние назад), так и оставлять его неизменным (рассеяние вперёд).

Подсчитаем проводимость такой одномерной системы, для начала – в случае одной подзоны и без рассеяния на примесях (случай баллистического пролёта, простое и гораздо более ясное, чем во многих учебниках, объяснение дано в оригинальной статье [4]).

Пусть к одномерной проволоке приложено напряжение, т.е. на концах проволоки поддерживается разность электрохимических потенциалов $(\mu_1 - \mu_2) = eV$

Как обычно, ток по проволоке можно записать как $I = ev\Delta n$, где e - заряд электрона, $v = \partial E/\hbar\partial k$ - групповая скорость электрона, а плотность носителей мы определим через плотность состояний $\Delta n = \partial n/\partial E \times \Delta\mu$

Поскольку в одномерном случае $\partial n/\partial k = 1/2\pi$ полный ток через одномерный проводник будет задан соотношением

$$I = \frac{e}{h}(\mu_1 - \mu_2) = \frac{e^2}{h}V \quad (2.10)$$

При N заполненных подзонах размерного квантования полный ток по образцу будет записан как $I = N(e/h)\Delta\mu$, так что при изменении числа подзон (например, при плавном сужении проводника) должно наблюдаться квантование проводимости с квантом, определяемым комбинацией фундаментальных констант (e^2/h).

В случае отсутствия вырождения по спину (нулевое магнитное поле) квант проводимости должен быть записан как $2(e^2/h)$, двойка происходит из плотности состояний - на элемент фазового пространства теперь приходится 2 электрона. Именно в этом смысле часто проводят различные расчёты для "бесспиновых" электронов (как нами сделано в предыдущем абзаце), практически имея в виду полностью спин-поляризованную систему но без внешнего магнитного поля и связанных с ним эффектов. Это ещё раз подчёркивает, за обозначениями и соглашениями, принятыми в конкретном расчёте стоит внимательно следить.

Казалось бы, одномерный проводник, рассмотренный в этом параграфе должен демонстрировать идеальное квантование проводимости. Это не совсем так. Мы предположили идеальный баллистический пролёт электронов через такой проводник и идеальность контактов (резервуаров, поддерживаемых при заданных электрохимических потенциалах) к баллистическому одномерному проводнику. В реальных, даже очень чистых и коротких проводниках это невозможно гарантировать принципиально, в результате точность квантования не является абсолютной.

В этом смысле принципиально отлично поведение проводимости двумерных систем в квантующих магнитных полях, т.е. в режиме квантового эффекта Холла. Квантовый эффект Холла в двумерных системах является в известном смысле краевым, т.е. так же одномерным эффектом (см следующие лекции) – транспортный ток сосредоточен на краях двумерного образца. При этом нарушение симметрии по отношению к обращению времени в магнитном поле подавляет рассеяние назад и делает квантование холловского сопротивления нечувствительным к наличию примесей, что приводит к абсолютно точному квантованию в реальных макроскопических системах с наличием беспорядка.

Для одномерных проводников Ландауэр предложил учитывать рассеяние феноменологически, введя коэффициент прохождения T (он определяет интегральную вероятность электрону пройти образец насквозь, соответственно $1-T$ – вероятность отразиться), тогда полный ток запишется как

$$I = \frac{e}{h} T (\mu_1 - \mu_2) = \frac{e^2}{h} T V \quad (2.11)$$

Формализм Ландауэра, благодаря простоте, оказался полезен во многих задачах современной физики, где движение носителей заряда можно описывать как одномерное.

Влияние электрон-электронного взаимодействия в одномерном случае.

Из предыдущего изложения понятно, что одномерные системы, в силу принципиальной чувствительности к беспорядку, не могут похвастать абсолютной точностью квантования проводимости, в отличие от квантового эффекта Холла. Однако, в одномерных системах к абсолютно радикальным, с фундаментальной точки зрения, последствиям приводит влияние электрон-электронного взаимодействия. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Чтобы осознать суть проблемы, существующей в одномерном случае, попробуем создать в бесспиновой одномерной системе пару частица – пустое место с малым импульсом, по аналогии с созданием возбуждения в обычном Ферми газе. Для начала полностью пренебрежем взаимодействием. Поскольку ферми-поверхность в одномерном случае выродилась в две точки $(+p_F, -p_F)$, то единственной возможностью является увеличение модуля импульса исходного фермиона так, что он переместится в состояние над одной из ферми-точек. На не вполне адекватной ситуации, зато наглядном квазиклассическом языке, можно сказать, что фермион увеличил свою энергию и импульс не смещаясь в пространстве. Другими словами, фермион и пустое место из рожденной пары изначально пространственно совпадают. В двумерных и трехмерных системах импульсы фермиона и пустого места не обязаны совпадать по направлению, поэтому рожденная пара быстро разбегается в пространстве. В одномерном случае, разбегание будет определяться только разностью групповых скоростей начального и конечного состояний электрона. При линейном законе дисперсии вблизи p_F (что заведомо является хорошим приближением при малом импульсе пары), скорости совпадут и, следовательно, разбегания вообще не будет.

Ситуация сильно напоминает экситонные возбуждения, с той лишь разницей, что связаны электрон и дырка за счет кинематики, а не за счет взаимодействия. Соответственно, при любом, сколь угодно слабом взаимодействии (а для электрона и дырки это притяжение) описанное "одночастичное" возбуждение будет иметь пренебрежимо малое время жизни. В итоге, способ построения возбуждений путём переноса частицы из-под Ферми поверхности наружу, так удачно работающий в трёх и двух измерениях, в одномерной задаче невозможен. Это и имеют в виду, говоря о невозможности ферми-жидкостного описания одномерных проводников с сильным межчастичным взаимодействием.

При этом не существует такого же очевидного запрета на существование коллективных возбуждений, одним из примеров которых в обычных трёх- и двумерных являются плазменные колебания (в простейшем случае рассмотренные в курсе общей физики в разделе электричество [2]). Сказанное наводит на мысль о возможности описания возбуждений в одномерной жидкости как бозевских частиц - плазмонов. Эта идея впервые была использована Томонага и Латтинджером, а одномерная электронная жидкость называется Латтинджеровской жидкостью. В таких системах возникает масса интересных вопросов о переносе заряда и спина, рассеянии на примесях, туннельной плотности состояний. На данный момент количество теоретических предсказаний в этой области значительно превышает количество экспериментальных работ (см. например обзор [10] для введения в проблему).

2.3.3 Нульмерные системы - квантовые точки.

В двух предыдущих задачах (двумерная и одномерная системы) добавленный заряд мог свободно перераспределяться по образцу, в силу отсутствия ограничения размера хотя бы по одному направлению. При этом добавление заряда к системе можно было осуществлять непрерывно. В случае наночастицы (квантовой точки) это уже не так.

Рассмотрим систему, состоящую из квантовой точки, соединённой туннельными контактами с двумя обычными (одномерными, двумерными, трёхмерными) проводниками. Будем изучать транспорт заряда между этими контактами, осуществляемый переносом электрона сначала на квантовую точку а потом на второй контакт. Явление кулоновской блокады состоит в подавлении такого транспорта за счет увеличения кулоновской энергии точки при попадании на нее хотя бы одного электрона: если электронное состояние в точке занято, добавить следующий электрон к квантовой точке нельзя, не преодолев энергию кулоновского взаимодействия этих двух электронов.

Оценим энергию, которая необходима, чтобы поместить на точку дополнительный электрон. Это - кулоновская энергия с масштабом $e^2/\epsilon a$ (ϵ - эффективная диэлектрическая проницаемость среды, для полупроводниковых структур порядка 10), - характерный размер квантовой точки. Для реальных (достаточно малых) систем эта энергия примерно на порядок превышает расстояние между уровнями размерного квантования. Таким образом, эта характерная кулоновская энергия будет определяющей в задачах транспорта, для любых меньших энергий добавление второго электрона к квантовой точке будет невозможно, и при достаточно низких температурах можно будет наблюдать добавление электронов по одному к квантовой точке.

Эффект кулоновской блокады лежит в основе работы одноэлектронного транзистора.

В качестве литературы по типам низкоразмерных систем можно порекомендовать учебник [5].

Глава 3

Низкоразмерные системы – реализация на основе полупроводниковых структур

3.1 Реализация квантовой ямы.

Как понятно из предыдущей лекции, для практической реализации низкоразмерных систем необходимо наличие квантовой ямы, ограничивающей движение электронов в одном или более направлений. Такие ямы могут возникать во многих случаях самопроизвольно, например, металлическая гранула малого размера является одной из возможных реализаций квантовой точки, а поверхностный слой, вызванный загибом зон на границе трёхмерного куска чистого висмута или германия – реализацией двумерной системы. Однако для серьёзной исследовательской или практической работы такие системы не подходят и могут использоваться лишь случайно. Абсолютно необходимо иметь возможность полностью управлять размерами и профилем ямы, высотой потенциальных стенок, концентрацией носителей в яме, количеством ям в одной структуре, силой туннельной связи между двумя такими ямами и т.д. и т.п. Другими словами нужна полноценная инженерия низкоразмерных систем. На данный момент такая инженерия обеспечивается только развитой полупроводниковой технологией, в частности, методами молекулярно-лучевой эпитаксии. По этой причине, несмотря на любые спекуляции в популярной литературе, физика наносистем есть раздел (возможно, основной раздел) современной физики полупроводников.

В последующем изложении мы разберём лишь основной физический принцип, лежащий в основе создания наноструктур, не отвлекаясь на всевозможные технические нюансы. Этот принцип заключается в создании атомарно-резкой границы двух полупроводников с сильно разными ширинами запрещённых зон, например, GaAs – AlAs – гетероперехода.

На рисунке Рис. 3.1 приведён такой контакт в абсолютно идеализированной ситуации, когда оба полупроводника являются абсолютно чистыми и уровень Ферми должен лежать точно посередине соответствующей запрещённой зоны.

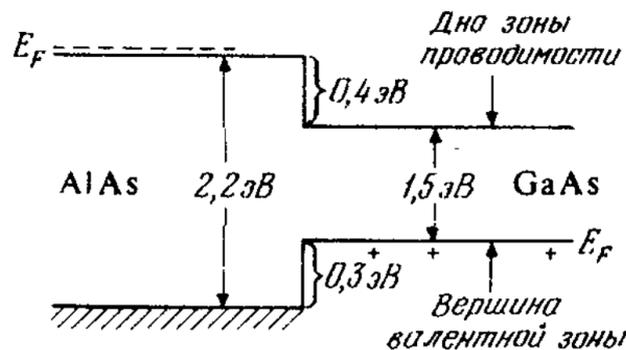


Рис. 3.1: Атомарно-резкая граница двух полупроводников с сильно разными ширинами запрещённых зон, GaAs и AlAs, в абсолютно идеализированной ситуации, когда оба полупроводника являются абсолютно чистыми и уровень Ферми должен лежать точно посередине соответствующей запрещённой зоны. (рисунок из работы [6])

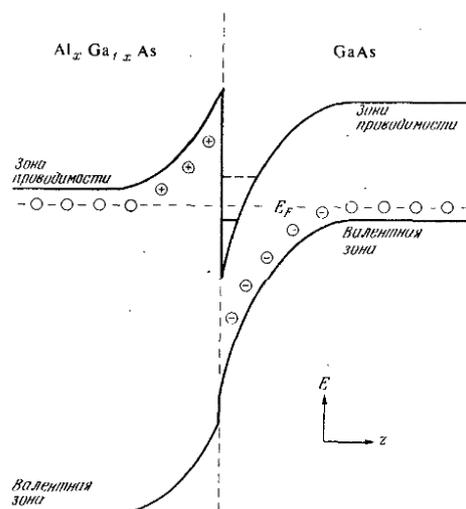


Рис. 3.2: Загиб зоны проводимости и валентной зоны на границе двух полупроводников с сильно разными ширинами запрещённых зон, GaAs и AlAs, и возникновение квазитреугольной квантовой ямы (рисунок из работы [6])

ющей запрещённой зоны. Соответственно, нет ограничения движения электронов в зоне проводимости. На практике, GaAs даже максимальной степени очистки является слабым полупроводником p-типа, так что вдали от гетерограницы уровень Ферми в GaAs должен находиться вблизи дна валентной зоны. AlAs же, наоборот, является полупроводником n-типа, т.е. опять-таки вдали от гетерограницы уровень Ферми должен лежать вблизи дна зоны проводимости. Поскольку в равновесии положение уровня электрохимического потенциала в системе должно быть постоянно, вблизи гетерограницы будет происходить загиб зон, за счёт перераспределения заряда, для обеспечения постоянства уровня Ферми.

Следующим шагом является искусственное селективное допирование (легирование, внесение легирующих примесей) отдельных участков такой структуры, благодаря которому можно вызвать загиб зон нужного типа. Например, создав на гетерогранице квазитреугольную квантовую яму, см. Рис. 3.2.

В яме как и положено возникают уровни размерного квантования, и чисто двумерная система возникает когда под уровнем Ферми лежит только один уровень энергии. Этого можно достичь подбирая параметры роста такой структуры (состав, легирование, температура, скорость роста отдельных слоёв) для получения квантовой ямы нужных параметров.

Вообще говоря, технология позволяет, в случае AlGaAs, за счёт плавной смены состава полупроводника по мере роста, растить квантовые ямы произвольного профиля, например, параболического с узким туннельным барьером посередине. Положение уровня Ферми опять-таки задаётся с помощью селективного легирования примесями вне квантовой ямы, см. Рис. 3.3.

Важным вопросом является степень чистоты (отсутствия нежелательных примесей) и однородности полученных систем. Например, примеси в квантовой яме приводят к уширению уровней размерного квантования. Это уширение из принципа неопределённости можно оценить как \hbar/τ где τ - характерное время рассеяния. Если эта величина сравнится с расстоянием между размерно квантованными уровнями, об отдельных подзонах размерного квантования можно будет забыть. Речь в данном случае должна идти не только о неконтролируемом загрязнении структуры в процессе роста, но и о целенаправленно вносимых легирующих примесях. Например, в структурах на основе GaAs для достижения концентраций носителей выше $3 \times 10^{11} \text{см}^{-2}$ уровень необходимого легирования приводит к значительному рассеянию электронов в двумерном слое, т.е. к резкому падению подвижности носителей. По этой причине создание высокоподвижных двумерных систем с высокой концентрацией носителей является нетривиальной технологической задачей, доступной лишь нескольким технологическим группам в мире.

3.2 Полевой транзистор.

Исторически, первой системой в которой искусственно была реализована треугольная квантовая яма для электронов, является кремниевый полевой транзистор. В этом случае “гетеропереход” осуществляется

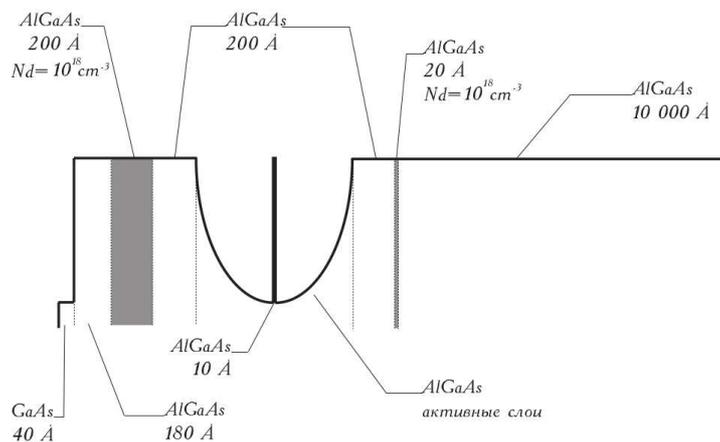


Рис. 3.3: Параболическая квантовая яма с узким туннельным барьером посередине, выращенная за счёт плавной смены состава полупроводника.

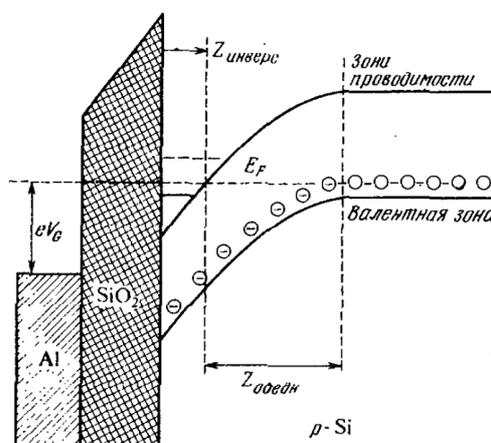


Рис. 3.4: Схема зон в МДП-структуре (металл - диэлектрик - полупроводник), приводящая к образованию треугольной квантовой ямы (рисунок из работы [6])

между полупроводником (кремнием р или п типа), и диэлектриком, т.е. материалом с практически бесконечной шириной запрещённой зоны. Вдали от границы положение уровня Ферми определяется, с одной стороны от диэлектрика, допированием в полупроводнике, а с другой – потенциалом металлического электрода, нанесённого на слой диэлектрика. Меняя этот потенциал, можно управлять как знаком, так и величиной загиба зон на границе полупроводник-диэлектрик, создавая узкую квантовую яму, см. Рис. 3.4.

Логика, лежащая в основе этих рассуждений уже должна быть понятна читателю из обычной теории р-п перехода. Прогресс технологии привёл к возможности перейти от объёмного легирования геометрически разнесённых областей полупроводника к созданию атомарно-резких границ и селективному легированию отдельных атомных слоёв. По этой причине рассмотрение “классического” р-п перехода имеет в основном методическое значение. В силу требований по размерам и энергоэффективности, основой современной элементной базы служит именно полевой транзистор либо на основе кремния либо различного типа гетероструктур.

Секретом завидной выживаемости кремния в электронной технике является исключительная технологическая простота изготовления границы полупроводник – диэлектрик и высокое качество самого диэлектрика. Именно, двуокись кремния нужной толщины получают контролируемым окислением поверхности кремниевой пластины. В итоге получается слой диэлектрика, способный выдержать без утечек значительные приложенные напряжения (порядка 100 В на 100 нм слое оксида), что является абсолютным рекордом среди совместимых с полупроводниковой технологией диэлектриков (в случае нелегированного AlAs, например, соответствующая величина на порядок меньше – около 10 В на 100 нм толщины). По этой причине кремний есть, и по видимому, на многие годы останется основой электронной техни-

ки, другие системы используются при наличии специальных требований - сверхвысокого быстродействия (GaAs/AlGaAs), чувствительности к определённым оптическим диапазонам (HgCdTe), и т.п.

3.3 Дополнение - Углеродные материалы – графен, нанотрубки, фуллерены.

Время от времени, в литературе возникает бум по поводу углеродных материалов и их возможных применений в физических исследованиях и электронике. При этом раз за разом возникает интересная картина – количество теоретических работ по соответствующей тематике на пару порядков превышает количество экспериментальных исследований, возникает некий пик интереса, который сходит на нет в течение нескольких лет. Так было с фуллеренами, углеродными нанотрубками, в наши дни мы находимся в условиях резкого спада интереса к графену. В связи с завидной повторяемостью такого рода событий, стоит уделить этому вопросу несколько слов.

Прежде всего о предмете разговора. Графеном принято называть одиночный (реже – двойной) слой атомов углерода [7]. В целях исследования его свойств, графен помещают на диэлектрическую подложку (обычно двуокись кремния) отделяющую графен от металлической пластины с хорошей проводимостью (обычно это сильно легированный кремний). Прикладывая к такой пластине электрический потенциал относительно графеновой чешуйки, можно управлять количеством и знаком носителей заряда в графене так же как в обычном полевом транзисторе. Существует вариант “подвешенного” между двух омических контактов графена, в котором роль диэлектрика играет вакуумный промежуток.

В чём причина взрывного интереса к графену? При беглом взгляде на литературу могло бы возникнуть впечатление, что это, прежде всего, дираковский (линейный) спектр носителей. Это впечатление абсолютно ошибочно. Физика полупроводников знает массу систем (как двумерных, так и трёхмерных) с бесщелевым и соответственно в некоторых пределах линейным спектром. Например, объёмные кристаллы CdHgTe и PbSnTe, используемые в фотодетекторах, при соответствующем составе компонент демонстрируют линейный спектр, что известно примерно с 70-х годов XX века. Т.е. тот самый спектр, который стало принято называть дираковским, хотя скорее его стоит называть спектром Вейля (см. работу [8] где такой спектр был впервые предсказан в полупроводниках).

Реальный интерес к графену обусловлен скорее удачным маркетингом – с первых работ авторы заявляли [7], что открыли предельно простой (вручную, с помощью скотча) способ сделать полевой транзистор на графене, с подвижностями носителей, сравнимых с лучшими образцами структур на основе арсенида галлия (самая чистая на данный момент полупроводниковая система). Это заявление произошло на фоне явного и устойчивого замедления прогресса технологии получения высокоподвижных низкоразмерных систем стандартными методами полупроводниковой технологии. Примерно к 2000-му году предельная подвижность носителей заряда в гетероструктурах GaAs/AlGaAs насытилась вблизи $10^7 \text{cm}^2/\text{Vs}$, попытки дальнейшего увеличения дали формальный рост подвижности в 2-3 раза при катастрофическом росте степени неоднородности образца. При этом стоит упомянуть, что увеличение подвижности в структурах GaAs/AlGaAs на порядок, с $10^5 \text{cm}^2/\text{Vs}$ до $10^6 \text{cm}^2/\text{Vs}$, произошедшее в 80-х годах XX века, привело к открытию целого ряда неожиданных физических эффектов, связанных с режимом дробного квантового эффекта Холла. Можно было бы ожидать, что дальнейший рост степени чистоты низкоразмерных систем позволит, например, исследовать область между парамагнитной Ферми-жидкостью и Вигнеровским кристаллом, где не работают современные теории и можно ожидать ранее не предсказанных эффектов. Нестандартный спектр был лишь дополнительной, хоть и очень интересной возможностью. Огромный вал теоретических публикаций по графену в основном был связан с переформулировкой классических результатов на случай дираковского спектра, в надежде на скорый эксперимент.

Что оказалось в итоге? Доложенные в первых работах подвижности так и не были никогда подтверждены (хотя в последних работах, путём преодоления невероятных технологических трудностей при получении подвешенного графена, схожие цифры всё же были достигнуты. Что ещё раз доказывает что в исходных образцах их не было даже близко - общепринятые сейчас значения подвижностей для графена лежащего на оксиде кремния около $10^3 \text{cm}^2/\text{Vs}$). Графен оказался чрезвычайно грязным, технологически малоприспособным материалом. Первое, вообще говоря, очевидно – графит обладает свойством сорбировать различные примесные атомы, именно на этом принципе работают противогаз и угольный криогенный насос. Второе менее тривиально – казалось, можно будет модифицировать способы изготовления графена. Однако, все варианты получения полевого транзистора на графене в итоге свелись в первоначальному способу отщепления чешуек скотчем как минимум на одном из этапов, что даёт образец принципиаль-

но малого размера (около 10 микрон), расположенный в случайном месте и крайне неоднородный даже на таких масштабах длин. В итоге не удивительно, что среди сравнительно немногочисленных экспериментальных работ так и не было получено каких-либо нетривиальных (отличных от известных на стандартных двумерных системах) экспериментальных результатов.

Но у графенового бума оказалась и конкретная научная польза. В некоторых теоретических исследованиях возник интерес к краевым состояниям в двумерных системах в случае дираковского спектра. Это возродило интерес к ранним предсказаниям [8], где была предложена система, впоследствии названная топологическим изолятором. В такой системе уровень Ферми лежит в запрещённой зоне в объёме образца, вдали от краёв, при этом вблизи края существуют проводящие состояния, нечувствительные к наличию примесей и беспорядка в силу топологических причин. Эти предсказания удалось проверить на “нормальных”, т.е. полученных в стандартном технологическом процессе и обладающих соответственно высоким качеством квантовых ямах на основе HgCdTe. В качестве введения в эту тематику можно посоветовать оригинальную работу [9].

Та же судьба постигла и углеродные нанотрубки (монослой атомов углерода, как бы свёрнутый в трубочку – одномерная система). Необычайная чувствительность к примесям и технологическая малопригодность не позволили и здесь получить принципиально новых физических результатов, хотя возникший интерес к одномерному транспорту позволил развить и потом экспериментально исследовать в различных одномерных полупроводниковых системах концепцию одномерной, сильно взаимодействующей Латтинжеровской жидкости (см. например обзор [10] для введения в проблему).

3.4 Задачи к первым двум лекциям

Параметры конкретных систем проще всего продемонстрировать с помощью задач по теме первых двух лекций, предложенных ниже. Решения задач не приводятся, поскольку эти задачи входят в состав заданий по общей физике для студентов ФОПФ МФТИ третьего года обучения.

- Многие исследования физики низких размерностей требуют применения низких и сверхнизких температур. Оценить характерные температуры, при которых существенно термическое возбуждение через запрещённую зону в следующих веществах: кремний (ширина запрещённой зоны примерно 1 эВ), квантовая яма в полевом транзисторе на основе кремния (глубина потенциальной ямы в зоне проводимости порядка 0.1 эВ), однослойный графен.
- Для проводящей структуры с характерным размером d можно установить различные критерии низкоразмерности, например, по отношению к: а) длине сбоя фазы; б) длине свободного пробега; в) размерному квантованию. Именно последний случай наиболее существенен в современной физике. Вычислить расстояние (по энергии) между нижними уровнями размерного квантования для двумерного электронного газа в Si и GaAs в приближении прямоугольной потенциальной ямы в z направлении с бесконечно высокими потенциальными стенками (параметры: эффективная масса в GaAs и Si 0.067 и 0.19 свободных масс соответственно. Ширину ямы принять равной 20 нм). Сравнить полученное значение с характерными температурами – комнатной (300K), температурой жидкого азота (77K), температурой жидкого гелия (4K)
- Оценить расстояние (по энергии) между уровнями размерного квантования в квазиодномерной проволоке в GaAs диаметром 100 нм и определить область температур, в которой возможно наблюдение эффектов связанных с таким размерным квантованием.
- Квантовые точки. Кулоновская блокада. В двух предыдущих задачах (двумерная и одномерная системы) добавленный заряд мог свободно перераспределяться по образцу, в силу отсутствия ограничения размера хотя бы по одному направлению. В случае наночастицы (квантовой точки) это уже не так. Если электронное состояние в точке занято, добавить другой электрон к квантовой точке нельзя (кулоновская блокада). Явление кулоновской блокады состоит в подавлении транспорта между берегами структуры за счет увеличения кулоновской энергии точки при попадании на нее хотя бы одного электрона. Оценить температуру, при которой возможно наблюдение эффектов кулоновской блокады в квантовой точке в GaAs с характерным размером 100 нм при измерении транспорта заряда через такую наночастицу (например, с помощью туннельных контактов).
- Квантовые точки. Кулоновская блокада. Оценить температуру, при которой возможно наблюдение эффектов кулоновской блокады в металлической грануле (например, алюминиевой) с характерным размером 10 нм, помещённой в непроводящую среду с диэлектрической проницаемостью порядка 1.

Глава 4

Электронны в магнитном поле.

4.1 Спектр невзаимодействующих электронов в магнитном поле

Решение задачи о спектре невзаимодействующих электронов в квантующем магнитном поле впервые было дано Л.Д. Ландау, и, несмотря на широкую известность, должно быть рассмотрено в курсе общей физики.

Было бы полезно первоначально получить тот же спектр $E = \hbar\omega_c(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ из квазиклассических соображений - написав классическое уравнение для движения электрона в магнитном поле, подставить его в правило квантования Бора-Зоммерфельда и получить отсюда разрешённые значения импульса и соответственно энергии. Приведём этот вывод в самом наивном случае, предполагая что читатель не знаком даже с определением правила квантования Бора-Зоммерфельда в [3]. Классическое уравнение движения электрона по окружности в магнитном поле, нормальном плоскости двумерного электронного газа

$$(e/c)Bv = mv^2/R$$

, где e – заряд электрона, c – скорость света, B – магнитное поле, v – скорость электрона. Отсюда радиус круговой траектории $R = mv(c/e)/B$. Согласно формулировке правила квантования Бора-Зоммерфельда в учебнике [1] “могут существовать только такие орбиты, на которых момент импульса равен целому числу постоянных Планка”. Т.е. $(mv)2\pi R = n\hbar$ Тогда подставляя радиус R и используя $(mv)^2 = 2mE$ получаем для разрешённых значений энергии E

$$(c/e)2mE2\pi/B = n\hbar$$

Откуда разрешённые значения энергии E пропорциональны $(eB/mc)\hbar n$, выражение в скобках – так называемая циклотронная частота ω_c . При использовании же правила квантования Бора-Зоммерфельда в виде, приведённом в т.3 Ландау и Лифшица [3] получается уже совсем правильное выражение $E = \hbar\omega_c(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Определим теперь уровни энергии свободного электрона в постоянном однородном магнитном поле решая соответствующую квантомеханическую задачу в двумерном случае [3]. Векторный потенциал выбираем в калибровке Ландау $\mathbf{A} = (-Hy, 0, 0)$ (поле H вдоль оси z).

Гамильтониан запишется как

$$H = \frac{1}{2m}(p_x + \frac{eH}{c}y)^2 + \frac{p_y^2}{2m}, \quad (4.1)$$

где для простоты предполагается отсутствие спина и двумерное движение в плоскости XY .

Решение уравнения Шредингера $H\psi = E\psi$ будем искать в виде

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar}p_x x} \chi(y) \quad (4.2)$$

что приводит к широко известному уравнению для гармонического осциллятора

$$\chi'' + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - \frac{m}{2} \left(\frac{eH}{mc} \right)^2 (y - y_0)^2 \right] \chi = 0, \quad (4.3)$$

где $y_0 = -\frac{cp_x}{eH} = -l_h^2 k_x$ – так называемая “координата ведущего центра а $l_h = (c\hbar/eH)^{1/2}$ - магнитная длина. Это уравнение даёт уровни энергии электрона в магнитном поле:

$$E = \frac{|e|H}{mc} \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (4.4)$$

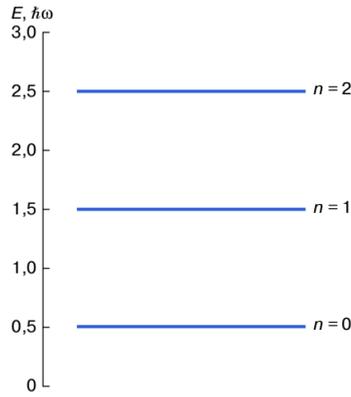


Рис. 4.1: Уровни энергии электрона в магнитном поле

где m - зонная масса, e - заряд электрона, и $n = 0, 1, 2, \dots$ - номер квантового уровня. Другими словами, задача об электроне в магнитном поле свелась к задаче об уровнях размерного квантования в параболическом потенциале.

Уровни энергии эквидистантны и отделены друг от друга циклотронной щелью $\hbar\omega_c$. Такое квантование называется квантованием Ландау, а уровни энергии - уровнями Ландау. Именно наличие щелей в спектре электронной системы ответственно, например, за существование режима целочисленного квантового эффекта Холла.

Выбор направлений x, y пока (в случае неограниченного образца) произволен. Очевидно, что полученное решение не зависит в том числе и от выбора калибровки. Можно было бы решать задачу в центрально-симметричной калибровке, где движение электрона раскладывалось бы на азимутальное, описываемое волновой функцией типа $e^{i\theta m}$, где θ - азимутальный угол, и радиальное, задаваемое тем же уравнением Шредингера для гармонического осциллятора.

4.2 Осцилляционные эффекты в магнитных полях.

Вышеизложенный вывод спектра электрона в магнитном поле не случайно проведён именно в двумерном случае. Именно для двумерной системы спектр является целиком дискретным и представляет собой набор эквидистантных уровней Ландау. Температура, необходимая для надёжного проявления эффектов квантования спектра должна быть на порядок ниже щелей в полученном спектре, т.е. в большинстве случаев мы приходим к криогенным температурам (порядка температуры кипения жидкого гелия).

В силу статистики, электронные состояния при низкой температуре заполнены вплоть до уровня Ферми. Если мы будем менять магнитное поле, или плотность электронов в образце (что легко реализуется технически в двумерных системах), то будет меняться положение уровня Ферми относительно лестницы уровней Ландау. Уровень Ферми будет то совпадать с одним из уровней Ландау, то находиться в щели между уровнями. При этом можно ожидать появления осцилляций, заданных характерной циклотронной частотой, в различных физических свойствах такой системы. Такие осцилляции, например, в проводимости называются осцилляциями Шубникова-де Гааза, в намагниченности - эффектом де Гааза-ван Альфена, и т.п.

Исторически, экспериментальные исследования этих эффектов начинались для случая трёхмерных металлических образцов. В этом случае к полученному результату добавляется непрерывный спектр, связанный с тем, что движение электрона вдоль направления магнитного поля не квантуется. Кроме того, в силу наличия грязи (примесей) в реальных образцах уровни Ландау уширены, так что магнитное поле приводит скорее к некоторой модуляции плотности состояний. Осцилляции Шубникова-де Гааза, и де Гааза-ван Альфена в этих условиях крайне слабы. Тем не менее, на заре физики металлов они широко использовались для определения параметров поверхности Ферми в реальных образцах. По этой исторической причине изложение физики электронных систем в магнитном поле до сих пор начинают с подробного и нудного вывода соответствующих формул (Лифшица-Косевича, например), обсуждения эффектов анизотропии и реальной формы поверхности Ферми и т.п.

В наше время такой подход видится совершенно неоправданным, по крайней мере в курсе общей физики, как с практической, так и с методической точек зрения. С точки зрения определения особенностей

поверхности Ферми в различных системах появились гораздо более информативные методы, например ARPES (angle-resolved photoemission spectroscopy) . С методической точки зрения, наиболее прямым и рафинированным проявлением квантования Ландау является целочисленный квантовый эффект Холла, имеющий к тому же прямое метрологическое применение. Именно он и будет рассмотрен в дальнейшем, желающим изучить осцилляции в трёхмерных системах следует обратиться к любому классическому учебнику по физике твёрдого тела или монографии [11], написанной одним из участников работ тех лет.

4.3 Возможность рассмотрения электронов как свободных (не взаимодействующих) частиц.

Многие вопросы физики твёрдого тела рассматриваются в так называемом приближении свободных (не взаимодействующих) электронов. В то же время очевидно, что существует кулоновское взаимодействие между любыми двумя электронами. Возникает, прежде всего, вопрос, в каких условиях можно пренебречь кулоновским взаимодействием и в каких условиях такое взаимодействие приводит к новым физическим эффектам. Общий ответ на такой вопрос, по всей видимости, невозможен. Ниже мы приведём простейшую оценку, позволяющую в общих чертах проиллюстрировать проблему.

Для простоты рассмотрим случай нулевого магнитного поля. При достаточно низких температурах параметром, характеризующим кинетическое поведение электронов, является фермиевская энергия E_F . Чтобы можно было пренебречь взаимодействием между электронами, нужно, чтобы эта энергия существенно превышала энергию взаимодействия на характерном расстоянии между частицами. Характерное расстояние определяется концентрацией носителей $N_s^{-1/2}$ (в двумерном случае) где N_s – число электронов на единице площади.

Тогда условие слабого взаимодействия выглядит следующим образом:

$$p_F^2 = 2\pi\hbar^2 N_s; E_F = (\pi\hbar^2 N_s)/m > e^2 N_s^{1/2} / \epsilon_0 \quad (4.5)$$

где p_F – фермиевский импульс, m – эффективная масса частиц, ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость, а N_s – число электронов на единице площади.

Следовательно, пренебрежение эффектами межэлектронного взаимодействия возможно при

$$N_s \gg (me^2/\pi\hbar^2\epsilon_0)^2 \quad (4.6)$$

Интересной особенностью является тот факт, что для кулоновского газа взаимодействие становится более существенно при уменьшении электронной плотности. Это видно уже из исходных формул – энергия Ферми прямо пропорциональна электронной плотности, в то время как характерная энергия кулоновского взаимодействия пропорциональна корню из электронной плотности.

Для двумерного электронного газа в кремниевой МОП-структуре: эффективная масса носителя заряда 0.19 массы свободного электрона, эффективная диэлектрическая проницаемость около 10. Тогда критическая плотность может быть оценена как

$$(me^2/\pi\hbar^2\epsilon_0)^2 \sim 10^{12} \text{cm}^{-2} \quad (4.7)$$

Много это или мало? Обычно для того, чтобы численно охарактеризовать взаимодействие, используют безразмерный параметр r_s равный отношению радиуса Вигнера-Зейтца $((\pi N_s)^{-1/2}$ в двумерном случае) к боровскому радиусу $a_B = \epsilon_0\hbar/(2\pi me^2)$. Легко убедиться, что этот параметр описывает отношение характерной кулоновской энергии к энергии Ферми, полученное выше. В современных двумерных электронных системах в полупроводниковых структурах сравнительно легко достигаются значения $r_s = 10$, такая же ситуация и в нормальных трёхмерных металлах, где r_s попадает в интервал от двух до десяти.

Забегая вперёд, можно проиллюстрировать путь для аналогичной оценки в магнитном поле. В этом случае характерную энергию кулоновского взаимодействия следует оценить как

$$e^2/l_h\epsilon_0 \quad (4.8)$$

где $l_h = (c\hbar/eH)^{1/2}$ - магнитная длина, определяющая среднее расстояние между электронами. Особую осторожность следует проявить при оценке характерной кинетической энергии электронов. Во-первых, можно поступить как и в предыдущем случае – взять в качестве такой оценки энергию Ферми. В этом случае взаимодействие более существенно в сильных магнитных полях, где, например, наблюдается дробный квантовый эффект Холла. С другой стороны, есть класс физических задач, в основном связанных с

перестройкой спектра в магнитном поле, где характерную энергию кулоновского взаимодействия $e^2/l_h\epsilon_0$ необходимо сравнивать с другими спектральными характеристиками, например, циклотронным расщеплением $\hbar \frac{|e|H}{mc}$. В последнем случае взаимодействие окажется существенным, наоборот, в области слабых магнитных полей.

Важно понимать принципиально грубый характер таких оценок. В реальных задачах физики твёрдого тела учёт взаимодействия должен выполняться строго индивидуально, в зависимости от условий конкретной физической задачи. В итоге, несмотря на широкую применимость приближения свободных электронов, следует помнить о его ограниченности и возможности появления существенных эффектов, происходящих от электрон-электронного взаимодействия. Например, приближение свободных электронов позволяет верно описать основные причины квантования Холловского сопротивления в целочисленном случае, но полностью отказывает для режима дробного эффекта Холла, как будет показано в следующей главе.

4.4 Задачи к лекции

- Для электрона в сильном магнитном поле получить численную оценку щели между двумя уровнями Ландау для GaAs ($m=0.067$ свободных электронных масс) в магнитном поле 10 Тл и оценить температуру, необходимую для наблюдения эффектов, в которых наличие такой щели является существенным
- Многие вопросы физики твёрдого тела рассматриваются в так называемом приближении невзаимодействующих электронов, когда учитывается лишь взаимодействие электрона с кристаллической решёткой как изменение эффективной массы электрона. В то же время очевидно, что существует кулоновское взаимодействие между любыми двумя электронами. Оценить концентрацию носителей для случая двумерного металла, при которой справедливо пренебрежение межэлектронным взаимодействием (для численной оценки взять параметры двумерного электронного газа в кремниевой МОП-структуре: эффективная масса носителя заряда 0.19 массы свободного электрона, диэлектрическую проницаемость принять равной 10).
- Вигнеровская кристаллизация. Как следует из предыдущей задачи, при понижении электронной плотности роль межэлектронного взаимодействия будет возрастать. В предельном случае очень низких электронных плотностей электроны образуют правильную "кристаллическую" решётку, что приводит к локализации (диэлектрическому состоянию). Оценить электронную плотность, при которой может наблюдаться такая кристаллизация в двумерном случае.
- Провести оценку для двумерной электронной системы в магнитном поле, определив значения магнитного поля при которых нельзя пренебрегать кулоновским взаимодействием. Оценку провести вычислив отношение характерной энергии кулоновского взаимодействия к а) энергии Ферми, как и в предыдущем случае; б) циклотронной энергии. В качестве параметров взять характерные величины для двумерной системы в GaAs (эффективная масса носителей $m=0.067$ свободных электронных масс, диэлектрическая проницаемость 12.5, электронную плотность принять 10^{11}cm^{-2} .)

Глава 5

Квантовый эффект Холла.

Прогресс полупроводниковой технологии во второй половине XX века сделал возможным создание качественных низкоразмерных систем, в частности, высокоподвижных двумерных систем. Как всегда, принципиально можно было ожидать проведения исследований по двум направлениям: (i) исследование особенностей, присущих уже известным физическим явлениям в условиях пониженной размерности; (ii) поиска новых, ранее не наблюдавшихся и присущих только низкоразмерным системам эффектов. Несомненно, наиболее ярким примером последней группы является наблюдение квантового эффекта Холла. Он является вторым (после сверхпроводимости) макроскопическим квантовым эффектом, открытым в физике трёхмерного тела.

Квантовый эффект Холла (несколько обзоров существуют на русском языке [10, 12]) реализуется в высокоподвижных двумерных электронных системах, помещённых в квантующее магнитное поле при низкой температуре (порядка температуры жидкого гелия). Проявляется эффект как плато в холловской (недиагональной) компоненте тензора магнетосопротивления $R_{xy} = (h/e^2)1/\nu$, где фактор заполнения ν является целым числом 1, 2, 3, 4, ... (целочисленный КЭХ, см. Рис. ??) или рациональной дробью определённого вида $1/3, 2/3, 2/5, 3/5, \dots$ (дробный КЭХ, см. Рис. ??).

Диссипативная (диагональная) компонента тензора магнетосопротивления R_{xx} при этом обращается в нуль. Несмотря на то, что в обоих режимах уровень Ферми лежит в спектральной щели, происхождение этих щелей качественно разное. Для объяснения целочисленного КЭХ достаточно привлечь лишь квантование Ландау в спектре двумерной электронной системы в магнитном поле. Наоборот, возникновение дробного КЭХ целиком относят в проявлению электрон-электронного взаимодействия.

Исследование двумерных систем в режиме квантового эффекта Холла вызывает устойчивый интерес как с теоретической, так и с экспериментальной точек зрения с 80-х годов XX века. Этот интерес, исходно обусловленный исследованиями фундаментальных свойств двумерных систем в квантующих магнитных полях, даже возрос в настоящее время в связи с исследованием систем с нетривиальной топологией, так как режим квантового эффекта Холла является одной из возможных реализаций топологического изолятора (см. предыдущее изложение 3.3). Кроме того, при помощи краевых состояний в режимах целочисленного и дробного квантового эффекта Холла создаются электронные аналоги оптических интерференционных схем (в качестве обзора на русском языке можно порекомендовать [13]), экспериментальное исследование которых позволяет как изучать эффекты электрон-электронного взаимодействия в одномерной (Латтинжеровской) электронной жидкости, так и, возможно, выделить проявления анионной (дробной) статистики квазичастиц.

5.1 Качественное введение. Целочисленный эффект.

Хорошо известно, что даже в слабых магнитных полях магнитное поле влияет на орбитальное движение электрона. В классическом рассмотрении это влияние сводится к появлению силы Лоренца:

$$F = (e/c)[vH]. \quad (5.1)$$

Здесь v – скорость электрона, а H – напряженность магнитного поля. Сила Лоренца приводит, например, к возникновению поперечного (т.е. в направлении, перпендикулярном протекающему через образец току) напряжения — то есть к классическому эффекту Холла. При этом Холловское напряжение прямо пропорционально магнитному полю (см. Курс общей физики Сивухина, т.3). Вводят так же понятие холловского сопротивления, как отношение поперечного (холловского) напряжения к величине продольного

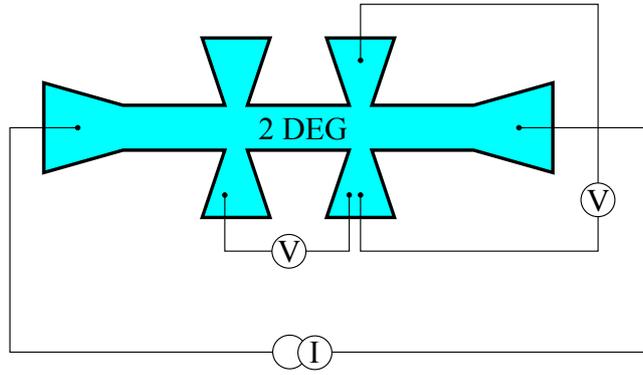


Рис. 5.1: Принципиальная схема измерения Холловского сопротивления

тока, текущему через образец. Классический эффект Холла широко применяется для измерения магнитных полей (датчики Холла) или для измерения концентрации и знака носителей тока в полупроводниках.

Пусть для простоты \mathbf{v} перпендикулярна \mathbf{H} . Тогда сила Лоренца нормальна скорости и, следовательно не производит работы над электроном. Энергия электрона остается постоянной, электрон движется по окружности в плоскости нормальной магнитному полю. Движение двумерного электрона в нормальном однородном магнитном поле оказывается пространственно ограниченным, следовательно при квантовомеханическом рассмотрении должен получиться дискретный энергетический спектр. Эта задача была решена Л.Д. Ландау (см. третий том Курса теоретической физики [3], а так же изложение выше), решение действительно привело к дискретному спектру, состоящему из эквидистантных (по энергии) уровней — уровней Ландау.

Теперь понятно, в чём принципиальная специфика двумерных систем — когда магнитное поле направлено перпендикулярно электронной плоскости, возникает чисто дискретный спектр $E = \hbar\omega_c(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, характеризующийся наличием щелей между разрешёнными значениями энергии.

В силу статистики, электронные состояния при низкой температуре заполнены вплоть до уровня Ферми. Режим, в котором для двумерной системы заполнено целое число уровней Ландау ν , называется режимом квантового эффекта Холла. В этом режиме наблюдается удивительно простое соотношение между током и Холловским напряжением:

$$I = \nu e^2 / h V_H, \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (5.2)$$

Здесь так называемое Холловское сопротивление $R_H = h/\nu e^2$ не зависит от типа и характеристик двумерной структуры и определяется только комбинацией фундаментальных констант: постоянной Планка и заряда электрона. На это обстоятельство следует обратить особое внимание — вне зависимости от формы, типа, степени чистоты, размеров двумерного образца, если квантовый эффект Холла наблюдается (условия наблюдения см. ниже) он всегда даёт квант сопротивления, определяющийся лишь комбинацией фундаментальных констант. По этой причине в современной метрологии эталон сопротивления реализован на основе квантового эффекта Холла.

Могло бы показаться, что, например, в образце с фиксированной электронной концентрацией режим КЭХ с данным ν должен наблюдаться при одном выделенном значении магнитного поля, определяемом вырождением уровня Ландау. В реальности данный режим наблюдается в некотором конечном интервале магнитных полей (Холловское плато). При этом в пределах плато край образца эквипотенциален, т. е. при измерении продольного сопротивления по четырёхточечной схеме будет обнаружено нулевое продольное сопротивление, см. Рис. 5.2.

Квантовый эффект Холла широко применяется в метрологии (эталон сопротивления, уточнение постоянной тонкой структуры). Кроме того, исследования свойств двумерных систем в режиме КЭХ привели к обнаружению различных физических эффектов. В последние годы режим КЭХ используется как модельный объект для исследования сложных фундаментальных проблем (состояния с нетривиальной топологией, одномерная взаимодействующая Латтинжеровская жидкость).

Для наблюдения КЭХ необходимы качественные двумерные электронные системы. В настоящее время целочисленный КЭХ наблюден в полевых транзисторах, квантовых ямах и гетеропереходах, а так же в графене (одиночный слой атомов углерода). Последний интересен тем, что представляет собой кустарно сделанную двумерную систему очень низкого качества, и всё же демонстрирует наличие квантового эффекта Холла.

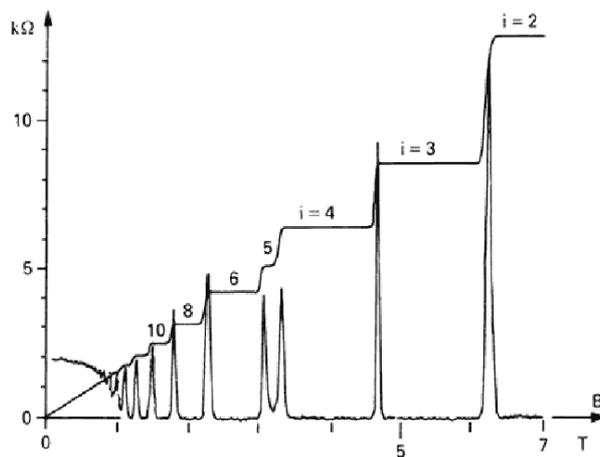


Рис. 5.2: Квантование Холловского сопротивления, целочисленный эффект (источник рисунка - The Nobel Prize in Physics 1998, Press Release 13 October 1998)

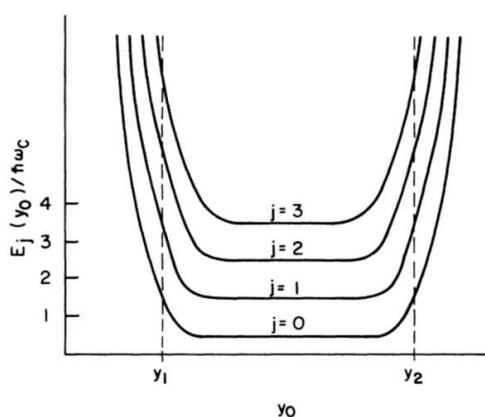


Рис. 5.3: Энергетический спектр двумерной электронной системы в квантующих магнитных полях (так называемая лестница уровней Ландау) с учётом потенциала краёв образца. (из работы [4])

5.2 Квантование холловского сопротивления. Целочисленный эффект.

Для понимания природы КЭХ необходимо показать, как наличие щелей в спектре приводит к квантованию Холловского сопротивления. Принципиальным тут оказывается тот факт, что реальный образец всегда ограничен. Именно происхождение от самого факта принципиального наличия границы и нечувствительность к её микроскопическому устройству делают КЭХ макроскопическим квантовым эффектом.

В случае наличия границы, сама геометрия образца предлагает выделенное направление - направление вдоль края. Разумный выбор калибровки состоит в том, чтобы сохранить разделение переменных и включить краевой потенциал только в уравнение гармонического осциллятора. Это можно сделать для любой реальной геометрии образца - как ограниченной с двух сторон полоски (Холловский мостик, или Холл-бар в иностранной литературе), так и для диска (геометрия Корбино) - путем соответствующего выбора калибровки.

Вблизи границ образца к потенциалу магнитной параболы добавляется собственно потенциал края, что приводит к всплыванию уровней энергии вблизи границ, см. Рис. 5.3: квазиклассически, электроны движутся по скачущим орбитам вдоль границ образца, при этом чем дальше за границу выходит геометрический центр квазиклассической круговой орбиты, тем выше частота соударений электрона о границу и соответственно, энергия данного электронного состояния, см. Рис. 5.4.

Загиб уровня энергии на краю образца в магнитном поле означает появление ненулевой групповой скорости электронов, направленной вдоль края образца. Естественно, в любом сечении границ две, и

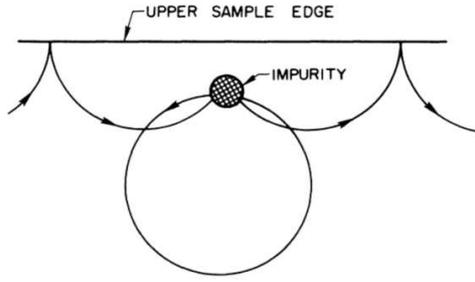


Рис. 5.4: "Скачущие" квазиклассические траектории на границе образца (из работы [4])

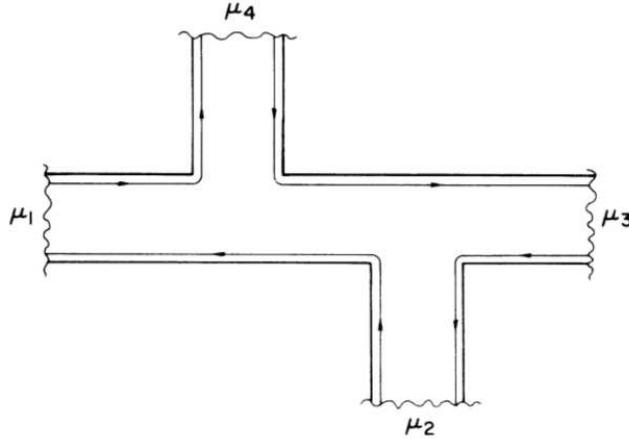


Рис. 5.5: Краевые токи в режиме КЭХ (из работы [4])

групповые скорости электронов вдоль них противоположны. Таким образом, в магнитном поле в образце существуют кольцевые недиссипативные холловские (диамагнитные) токи даже в условиях полного равновесия, распределение которых определяется градиентом потенциала в образце и магнитным полем. В условиях равновесия токи вдоль противоположных краёв полностью компенсируют друг друга. Эта компенсация нарушается при приложении к образцу разности электрохимических потенциалов (при помощи омических контактов к двумерной системе в реальных образцах), т.е. появляется конечный транспортный ток (подробнее см. обзор [10]), см. Рис. 5.5.

Подсчитаем транспортный ток вдоль образца. Как обычно, плотность тока на уровне Ландау $j = nev$, где плотность состояний на уровне Ландау $n = 1/2\pi l_h^2$ (вырождение каждого уровня можно получить точно, а можно и оценить, считая что на один электрон приходится "круг" с радиусом, равным магнитной длине), e - заряд электрона, $v = \partial E / \hbar \partial k$ - групповая скорость электрона.

Полный ток

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{y_1}^{y_2} j dy = - \int_{k_1}^{k_2} j l_h^2 dk \\
 &= \frac{e}{\hbar} \int_{k_1}^{k_2} \frac{\partial E}{\partial k} dk = \frac{e}{\hbar} \int_{\mu_1}^{\mu_2} dE = \frac{e}{\hbar} (\mu_1 - \mu_2)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

При n заполненных уровнях Ландау полный ток по образцу будет записан как $I = n(e/\hbar)\Delta\mu$ при наличии разности электрохимических потенциалов $\Delta\mu$ между краями образца (т.е. поперечного, холловского, напряжения $\Delta\mu/e$). Таким образом, ток определяется только разностью электрохимических потенциалов краев и числом заполненных уровней Ландау. В силу необходимости суммирования (интегрирования) нам не пришлось делать никаких предположений о реальной структуре краевого потенциала – важен только сам факт наличия границы у образца.

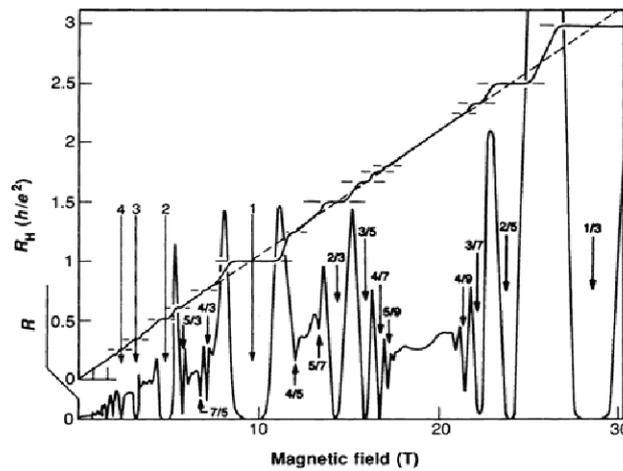


Рис. 5.6: Квантование Холловского сопротивления, дробный эффект (источник рисунка - The Nobel Prize in Physics 1998, Press Release 13 October 1998)

5.2.1 Влияние беспорядка, условия наблюдения.

Принципиальной особенностью режима КЭХ, определяющей все чудесные свойства этого режима, является отсутствие рассеяния назад. В обычном проводнике электрон, испытав акт рассеяния, например, на примеси, может, вообще говоря, изменить направление движения. Для макроскопического образца в режиме КЭХ это принципиально невозможно. Действительно, направление распространения электрона на краю задано магнитным полем и нормалью к краю. Процесс рассеяния назад соответствует перебросу электрона с одного края на другой, что невозможно в образцах макроскопических размеров. Именно поэтому КЭХ – макроскопический эффект, в котором речь принципиально идёт о полных (а не удельных) значениях тензора магнетосопротивления.

Итак, условиями наблюдения КЭХ является положение уровня Ферми внутри щели спектра двумерной системы, вызванной магнитным полем, и наличие границы у макроскопического образца. Щель может быть замкнута как в силу термического уширения уровней Ландау (когда kT превышает циклотронную щель), так и в силу уширения уровней Ландау короткопериодными флуктуациями потенциала (электроны частично локализируются беспорядком, так что уровни Ландау уширены, щель подвижности оказывается значительно меньше расстояния между центрами уровней Ландау и может оказаться ниже kT или вовсе отсутствовать).

Соответственно, эксперименты в режиме КЭХ проводятся в сильных (5-20 Тл) магнитных полях, при низких (30 мК- 4 К) температурах, в возможно более чистых образцах (характерные подвижности носителей в нулевом магнитном поле около $1\,000\,000\text{ см}^2/\text{Вс}$, что соответствует длине свободного пробега более 10 микрон). С другой стороны, пространственные неоднородности электронной плотности (вплоть до наличия дырки в образце) не влияют на возможность наблюдения эффекта (кольцевой ток вокруг неоднородностей не дает вклада в суммарный ток по образцу).

5.3 Дробный квантовый эффект Холла – основные представления.

Несмотря на схожесть с целочисленным КЭХ проявление в эксперименте, дробный квантовый эффект Холла не может быть объяснён в рамках предложенной выше картины. В частности, невозможно объяснить выделенность состояний, в которых фактор заполнения имеет вид рациональной дроби вида $1/3, 2/3, 2/5, 3/5, \dots$, см. Рис. 5.4.

Считается, что дробный КЭХ обязан наличию сильного электрон-электронного взаимодействия. В этих условиях метода для точного решения задачи с реальным гамильтонианом не существует. Взаимодействие перестраивает основное состояние системы частиц, и новое основное состояние не может быть получено по теории возмущений. Оказались продуктивными два подхода: метод среднего поля (гипотеза о композитных фермионах) и угадывание волновой функции основного состояния (подход Лафлина). Тем не менее, единое, последовательное и самосогласованное понимание дробного эффекта Холла на данный

момент отсутствует. Так, многие экспериментальные результаты, полученные в этой области, все еще ждут своего объяснения, и наоборот, многие теоретические предсказания так и не проверены на данный момент экспериментально.

С другой стороны, стоит дать простую иллюстрацию возникновению “магической последовательности” факторов заполнения, основанную на гипотезе о композитных фермионах. Идея метода состоит в том, чтобы перейти к новым квазичастицам – композитным фермионам, которые получаются прикреплением к каждому электрону 2-х квантов магнитного потока, направленных против внешнего поля. Подобный подход (переход к новым квазичастицам) часто оказывается эффективным в физике. Вспомним, например, введение фононов как способ учёта колебаний узлов кристаллической решётки. Далее, рассматривается движение одной такой частицы (композитного фермиона) в среднем поле всех остальных частиц и внешнем магнитном поле.

Легко сообразить, что новые частицы движутся уже в эффективном магнитном поле $B^* = B(1 - 2\nu)$, для них возникают уровни Ландау, разделенные “циклотронной” энергией $\hbar \frac{eB^*}{m_b c}$ и дробный эффект Холла может быть описан как целочисленный квантовый эффект Холла для композитных фермионов, т.е. должно возникнуть квантование Холловского сопротивления при некоторых факторах заполнения. Тогда факторы заполнения электронов ν , при которых должен наблюдаться эффект (реальные, рассчитанные из электронной плотности и магнитного поля) и композитных фермионов $p = 1, 2, 3, \dots$ связаны как $p = \nu/(1 - 2\nu)$.

К достоинствам теории композитных фермионов следует отнести легкость и некоторую элегантность объяснения “магической последовательности” факторов заполнения в дробном КЭХ.

5.4 Дополнительный материал - Современное понимание дробного квантового эффекта Холла

Считается, что дробный КЭХ обязан наличию сильного электрон-электронного взаимодействия. Достаточно рано стало понятно, что новое основное состояние - это не Вигнеровский кристалл с дальним порядком (он был бы запиннигован примесями и конечная холловская проводимость была бы невозможной), а состояние сильно взаимодействующей квантовой жидкости. При теоретическом описании этой квантовой жидкости оказались продуктивными два подхода: метод среднего поля (гипотеза о композитных фермионах) и угадывание волновой функции основного состояния (подход Лафлина). Второй способ в теории дробного квантового эффекта Холла оказался самым продуктивным, с него мы и начнем.

5.4.1 Вариационная функция Лафлина

Лафлин предложил использовать для описания основного состояния в режиме дробного квантового эффекта Холла при $\nu = 1/3$ волновую функцию вида

$$\Phi_m(z) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \prod_k \exp(-|z_k|^2 / 4l_h^2) \quad (5.4)$$

где $z_i = x_i - iy_i$ - комплексная (в плоскости) координата частицы, l_h - магнитная длина.

Эта волновая функция обладает следующими достоинствами:

1. При $m = 1$ является точной волновой функцией полностью заполненного низшего уровня Ландау (для невзаимодействующих электронов)
2. Антисимметрична по перестановке пары частиц при нечетном m (в силу степенного множителя $(z_i - z_j)^m$) - т.е. учитывает фермионную статистику
3. Зануляется при приближении частиц друг к другу (показатель степени m определяет скорость зануления) - учитывает динамическое отталкивание частиц
4. Является точной для систем с малым числом частиц ($N = 3 - 10$), что подтверждается численным расчетом (к этому утверждению надо относиться аккуратно, поскольку любое численное моделирование достаточно приближённо).

Предположив, что волновая функция основного состояния имеет такой вид, Лафлин провел вариационный расчет энергии основного состояния для дробных факторов заполнения типа $\nu = 1/(2k + 1)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, (так называемая основная лафлиновская последовательность) используя m как вариационный параметр. Оказалось, что

1. Энергия основного состояния минимальна при $m = 1/\nu = 3, 5, 7$ и в этих условиях ниже энергии основного состояния Вигнеровского кристалла (хотя при более низких ν считается что основное состояние Вигнеровского кристалла лежит ниже по энергии).

2. Элементарные возбуждения отделены от энергии основного состояния щелью с характерным масштабом энергии $0.1e^2/\epsilon l_h$, где ϵ - диэлектрическая проницаемость.

3. Элементарные возбуждения несут заряд $e/m = e\nu$.

4. Из возбуждений с данным нечетным m можно сконструировать дочерние основные состояния с большим нечетным m - т.е. частично объясняется иерархия состояний в режиме ДКЭХ (данный результат получен уже не самим Лафлиным).

Последний результат является наиболее сложным для понимания в теории Лафлина, и он же дает путь проверки теории - из него прямо следует, что если ДКЭХ наблюдается для "пятых" дробных факторов заполнения ($\nu = n/5, n = 1, 2, 3, 4$), он обязательно должен наблюдаться и на "третьих". Обратное же, вообще говоря, неверно.

Данный факт всегда подтверждается в эксперименте - по мере совершенствования чистоты и однородности двумерной системы сначала проявляется ДКЭХ на "третьих" дробях, потом на "пятых" потом идут "седьмые" и т.д.

Другое предсказание теории Лафлина, допускающее независимую проверку - в теории заложена симметрия между основными состояниями для факторов заполнения ν и $(1-\nu)$. В частности, основное состояние для фактора заполнения $\nu = 2/3$ может быть построено как основное состояние для дырок с фактором заполнения $\nu = 1/3$ на фоне полностью заполненного нижнего уровня Ландау. В силу способа построения, это состояние может быть построено и как спин-поляризованное, и как спин-неполяризованное. В слабых магнитных полях энергетически выгоднее спин-неполяризованное основное состояние, в сильных - спин-поляризованное. Таким образом, при увеличении магнитного поля должен произойти фазовый переход из спин-неполяризованного в спин-поляризованное состояние. Такой фазовый переход действительно наблюдался экспериментально.

5.4.2 Гипотеза о композитных фермионах

Другим подходом к описанию системы в режиме дробного эффекта Холла является гипотеза о композитных фермионах. Рассмотрим гамильтониан системы взаимодействующих электронов:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{(p_i + \frac{e}{c} A_i)^2}{2m_b} + \sum_{i \neq j} V(r_i - r_j) + \sum_{i=1}^N U(r_i) \quad (5.5)$$

Здесь первый и последний члены описывают движение одного электрона в магнитном поле и внешнем скалярном потенциале (см. начало первой части обзора), а второй - парное взаимодействие электронов. Понятно, что решить уравнение Шредингера для большого числа частиц с таким гамильтонианом - невозможно.

Идея метода состоит в том, чтобы заменить реальный гамильтониан на модельный. Физически переход к модельному гамильтониану выполняется прикреплением к каждому электрону 2-х квантов магнитного потока, направленных против внешнего поля и выполняется точное преобразование исходного гамильтониана. Далее, магнитные потоки, привязанные к электронам "размазываются" по образцу, и рассматривается движение одной такой частицы (композитного фермиона) в среднем поле (фиктивном усредненном вектор-потенциале) всех остальных частиц и внешнем магнитном поле. Член со взаимодействием в таком подходе не преобразуется (по этой причине не происходит преобразования эффективной массы - она остается зонной), и фактически далее не используется.

Модельный гамильтониан запишется как

$$H_{CF} = \frac{(p + \frac{e}{c} A - \frac{e}{c} \langle a(r) \rangle)^2}{2m_b} + U(r), \quad (5.6)$$

где $\langle a(r) \rangle$ и есть фиктивный усредненный вектор-потенциал.

Заметим, что этот гамильтониан уже одночастичный и допускающий точное решение (известное как квантование Ландау).

В результате новые частицы движутся уже в эффективном магнитном поле $B^* = B(1 - 2\nu)$, для них возникают уровни Ландау, разделенные "циклотронной" энергией $\hbar \frac{eB^*}{m_b c}$ и дробный эффект Холла может быть описан как целочисленный квантовый эффект Холла для композитных фермионов. Факторы заполнения электронов и композитных фермионов связаны как $p = \nu/(1 - 2\nu), p = 1, 2, 3, \dots$

К достоинствам теории композитных фермионов следует отнести легкость объяснения иерархии уровней в ДКЭХ, легкое введение спина (как дополнительного Зеемановского расщепления уровней композитных фермионов), и, самое главное, введение нового характерного размера - обратного фермиевского импульса, который проявляется в экспериментах по фокусировке электронов.

К недостаткам теории композитных фермионов следует отнести неправильный масштаб энергии возбуждения в режиме ДКЭХ (т.е. циклотронной энергии композитных фермионов, если не предполагать преобразования эффективной массы, как и требует модельный гамильтониан). С этой проблемой обычно справляются вводя эффективную массу композитных фермионов так, чтобы энергия возбуждения вела себя так же, как и в теории Лафлина (легко заметить, что эффективная масса при этом корневым образом зависит от магнитного поля). Можно, по-видимому, считать, что опущенный при переходе к модельному гамильтониану член, описывающий взаимодействие, как раз и приводит к перенормировке эффективной массы. К сожалению, данный способ невозможно последовательно обосновать в рамках описываемого подхода композитных фермионов.

Таким образом, единая, последовательная и самосогласованная теория дробного эффекта Холла на данный момент отсутствует.

За подробностями лучше всего обращаться к оригинальной научной литературе, список основных ссылок можно найти в русскоязычном обзоре [10].

5.5 Задачи к лекции

- В квазиклассическом приближении в квантующем магнитном поле электроны вращаются по круговым траекториям в объёме образца. На краю (около потенциальной стенки) ситуация изменяется – электроны ударяются о стенку, отскакивают от неё, по круговой траектории возвращаются к стенке и процесс повторяется. При каждом (упругом) столкновении меняется направление вектора скорости электрона, в том числе – той компоненты, что направлена вдоль края образца (потенциальной стенки). Таким образом, электроны движутся вдоль стенок образца по скачущим траекториям, направление их движения задано магнитным полем и нормалью к краю. В квазиклассическом приближении (при больших факторах заполнения ν , т.е. при большом числе заполненных уровней Ландау), для двумерного электронного газа в GaAs, оценить ширину краевой области в приближении бесконечно высокой потенциальной стенки. Магнитное поле принять 10 Тл, электронную концентрацию 10^{11}cm^{-2} .
- Пусть имеется одномерный проводник, реализованный как сужение двумерной системы в GaAs (эффективная масса носителей $m=0.067$ свободных электронных масс, диэлектрическая проницаемость 12.5, электронную плотность принять 10^{11}cm^{-2} .) При ширине проводника 30 нм в нулевом магнитном поле наблюдается квантование одномерной проводимости, связанное с конечным числом заполненных уровней размерного квантования. Оценить, в каком магнитном поле, перпендикулярном оси проводника, этот эффект пропадёт.
- Определить концентрацию носителей заряда в образце, если в поле 10 Тл наблюдается плато в холловском сопротивлении со значением 12.9 КОм.
- В режиме квантового эффекта Холла, при изменении магнитного поля и постоянстве концентрации, в образце меняется фактор заполнения ν (число заполненных, т.е. лежащих под уровнем Ферми, уровней Ландау) и, соответственно, осциллирует продольная компонента сопротивления R_{xx} (осцилляции сопротивления возникают при нахождении уровня Ферми в щели между соседними уровнями Ландау), а холловская компонента R_{xy} испытывает переходы между соответствующими плато. Определить зависимость фактора заполнения ν (число заполненных уровней Ландау) от магнитного поля. Можно ли, зная период осцилляций сопротивления, оценить размер соответствующей энергетической щели в спектре между соседними уровнями Ландау?
- При учёте спина электрона каждый уровень Ландау дополнительно расщеплён по проекциям спина (зеемановское расщепление). В случае двумерного электронного газа в GaAs сравнить величины данных расщеплений в поле 10 Тл и определить условия, при которых эти расщепления сравниваются. g -фактор принять равным 0.44.

Литература

- [1] Гольдин, Новикова, Квантовая физика. Вводный курс, — Москва: Институт компьютерных исследований, 2002.
- [2] Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. III. Электричество. — 4-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2004.
- [3] Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М., Квантовая Механика: Нерелятивистская теория. — М.:Физматлит, 2001.
- [4] Büttiker M., Absence of backscattering in the quantum Hall effect in multiprobe conductors // Phys. Rev. B — 1988. vol.38, — pp. 9375-9389.
- [5] Демиховский В.Я., Вугальтер Г.А. Лекции по физике низкоразмерных систем. Физика квантовых низкоразмерных структур. -М. Логос, 2000. -248 с.
- [6] Квантовый Эффект Холла: Пер. с англ./Под ред. Р.Пренджа, С. Гирвина. — М.: Мир, 1989.
- [7] A. K. Geim, K. S. Novoselov, Nature Mat. 6, 183 (2007).
- [8] B.A. Volkov and O.A. Pankratov, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 42, 145 (1985) [JETP Lett. 42, 178 (1985)].
- [9] M. Konig, S. Wiedmann, C. Brune, A. Roth, H. Buhmann, L.W. Molenkamp, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang, Science 318, 766 (2007).
- [10] Э.В. Девятов Краевые состояния в режимах целочисленного и дробного квантовых эффектов Холла // Успехи Физических Наук — 2007. vol. 177 (2) — pp. 207-227.
- [11] Шенберг Д. Магнитные осцилляции в металлах: Пер. с англ. —М.: Мир, 1986. — 680 с, ил.
- [12] Долгополов В.Т. "Целочисленный квантовый эффект Холла и сопряжённые с ним явления" // Успехи Физических Наук — 2014. т. 184, стр. 113–136.
- [13] Девятов Э.В. "Электронные интерферометры в режиме квантового эффекта Холла" // Физика Низких Температур, Том 39, Выпуск 1, 11-25 (2013).