

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

# Построение $(4-\epsilon)$ -мерной теории для плотности состояний неупорядоченной системы вблизи перехода Андерсона

И.М. Суслов

*Вычисление плотности состояний для уравнения Шрёдингера с гауссовым случайным потенциалом сводится к задаче о фазовом переходе второго рода с "неправильным" знаком коэффициента при члене четвертой степени в гамильтониане Гинзбурга–Ландау. Выделенность для такого гамильтониана размерности пространства  $d = 4$  может быть обнаружена с различных точек зрения, но наиболее фундаментальным образом она связана с соображениями перенормируемости. Попытка построения  $\epsilon$ -разложения в прямой аналогии с теорией фазовых переходов приводит к проблеме "ложного" полюса, для решения которой требуется корректный учет факториальной расходимости ряда теории возмущений. Использование упрощений, возникающих в высоких размерностях, для построения  $(4-\epsilon)$ -мерной теории требует последовательного рассмотрения четырех типов теорий: перенормируемых теорий при  $d > 4$ , перенормируемых и перенормируемых теорий в условиях логарифмической ситуации ( $d = 4$ ), суперперенормируемых теорий при  $d < 4$ . Для каждого типа теории выяснена структура приближения, необходимого для получения асимптотически точных результатов во всей области энергий, включая окрестность порога подвижности. В  $(4-\epsilon)$ -мерной теории при  $N \sim 1$  ( $N$  — порядок теории возмущений) учитываются лишь старшие степени  $1/\epsilon$ , а при больших  $N$  — и все низшие степени этого параметра, что необходимо ввиду быстрого роста по  $N$  их коэффициентов. Последние коэффициенты вычисляются в главной асимптотике по  $N$  из условия перенормируемости теории в форме уравнения Каллана–Симанчика с использованием асимптотики Липатова в качестве граничных условий. Показано, что происходит смещение точки фазового перехода с действительной оси в комплексную плоскость, которое приводит к обходу "ложного" полюса и регулярности плотности состояний при всех энергиях. Обсуждаются методы вычисления высоких порядков теории возмущений и перспективы использования метода  $\epsilon$ -разложения для исследования кинетических свойств вблизи перехода Андерсона.*

PACS numbers: 03.65.-w, 05.50.+q, 11.10.Ni, 71.23.An

## Содержание

1. Введение (503).
2. Выделенность размерности  $d = 4$  (506).
3. Проблема "ложного" полюса (509).
4. От высших размерностей — к низшим (510).
  - 4.1. Упрощение теории при  $d > 4$ .
  - 4.2. Четырехмерные перенормируемые (решеточные) модели.
  - 4.3. Четырехмерные перенормируемые модели.
  - 4.4. Переход к  $(4-\epsilon)$ -мерной теории.
5. Высшие порядки теории возмущений (515).
  - 5.1. Статистический метод.
  - 5.2. Метод Липатова.
  - 5.3. Алгебра факториальных рядов.
  - 5.4. Проблемы, которые нужно решать.
  - 5.5. Обзор инстантонных результатов.

6.  $(4-\epsilon)$ -мерная теория (521).
    - 6.1. Структура приближения для  $\Sigma(0, \kappa)$ .
    - 6.2. Перенормировка энергии и затухание.
    - 6.3. Собственная энергия  $\Sigma(p, \kappa)$  при конечных импульсах.
    - 6.4. Вычисление плотности состояний.
  7. Перспектива построения полной теории перехода Андерсона: роль  $\epsilon$ -разложения (526).
- Список литературы (529).

## 1. Введение

Современная теория неупорядоченных систем [1–7] восходит к пионерской работе Андерсона [1], в которой было сделано утверждение о возможности разрушения квантовой диффузии за счет беспорядка. Рассмотренная Андерсоном модель (получившая его имя) представляет собой уравнение Шрёдингера в приближении сильной связи

$$\sum_{x'} J_{x-x'} \Psi_{x'} + V_x \Psi_x = E \Psi_x \quad (1.1)$$

на  $d$ -мерной кубической решетке (векторные индексы  $x$  и  $x'$  нумеруют ее узлы); интегралы перекрытия  $J_{x-x'}$  быстро спадают с увеличением  $|x-x'|$ , а значения

И.М. Суслов. Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН, 117334 Москва, ул. Косыгина 2, Россия  
Тел. (095) 137-79-85  
Факс: (095) 938-20-30  
E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

Статья поступила 18 ноября 1997 г.

потенциала  $V_x$  в узлах решетки являются независимыми случайными величинами с шириной распределения  $W$ , которое обычно считается прямоугольным [1] или гауссовым:

$$P\{V_x\} \sim \exp\left(-\sum_x \frac{V_x^2}{2W^2}\right). \quad (1.2)$$

Спектр идеальной решетки

$$\epsilon(p) = \sum_x J_x \exp(-ipx) \quad (1.3)$$

соответствует наличию зоны конечной ширины  $J$ . Согласно Андерсону, при  $W \gg J$  диффузия в зоне отсутствует, а при уменьшении  $W$  она появляется при некотором критическом значении отношения  $W/J$ . Метод Андерсона состоял в построении ряда теории возмущений по степеням  $J_{x-x'}$  с последующей грубой оценкой и достаточно субъективным отбором диаграмм.

Модель Андерсона представляет собой дискретную версию обычного уравнения Шрёдингера со случайным потенциалом  $V(x)$ : это становится очевидным, если переписать уравнение (1.1) в виде

$$[\epsilon(\hat{p}) + V(x)]\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (1.4)$$

заметив, что  $\exp(i\hat{p}x)$  есть оператор сдвига на вектор  $x$  (начало отсчета энергии считаем выбранным так, что  $\epsilon(p) = p^2/2m$  при  $p \ll a_0^{-1}$ , где  $a_0$  — постоянная решетки). Это уравнение изучалось в начале 60-х годов в работах И.М. Лифшица [8], где было показано существование макроскопически большого числа состояний вне спектра исходной зоны, локализованных на флуктуациях случайного потенциала. Согласно Мотту [2], локализованные состояния отделены от протяженных (распространяющихся по всей системе) граничной энергией  $E_c$ , получившей название порога подвижности, так как статическая проводимость по локализованным состояниям при  $T = 0$  отсутствует. В зоне конечной ширины имеются два порога подвижности, соответствующие нижнему и верхнему краям зоны, которые при увеличении амплитуды беспорядка  $W$  сближаются и при некотором критическом значении  $W_c$  сливаются друг с другом: тем самым обнаруженное Андерсоном отсутствие диффузии связано с локализацией всех состояний в зоне. Переход металл–диэлектрик, который происходит, когда при изменении концентрации носителей или величины беспорядка уровень Ферми пересекает  $E_c$ , получил название перехода Андерсона. Он характеризуется сингулярным поведением проводимости  $\sigma$  и радиуса локализации волновых функций  $\xi$ , которое принято описывать степенными законами

$$\sigma \sim |E_F - E_c|^s, \quad \xi \sim |E_c - E_F|^{-\nu}, \quad (1.5)$$

вводя критические индексы  $s$  и  $\nu$  по аналогии с теорией фазовых переходов [9–11].

Сформированная Моттом качественная картина была опубликована во второй половине 60-х годов, и сразу же вызвала большой резонанс. Работа Андерсона [1] подверглась пристальному изучению; при этом не обошлось без курьезов, один из которых имеет прямое отношение к теме обзора. По общему признанию, работа Андерсона оказалась "плохо написанной и трудно понимаемой", что побудило Дж. Займана, известного своим

популяризаторским талантом, "объяснить все получше" [12]. Он сохранил основной диаграммный анализ Андерсона, но ввел одну "маленькую" модификацию. Андерсон работал с точными функциями Грина уравнения (1.1), которые выражаются через его собственные функции  $\psi_s(\mathbf{r})$  и собственные значения  $\epsilon_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ )

$$G_E^{\text{R,A}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_s \frac{\psi_s(\mathbf{r})\psi_s^*(\mathbf{r}')}{E - \epsilon_s \pm i\delta}, \quad (1.6)$$

при проведении оценок имея в виду их типичные (наиболее вероятные) значения. Займан же перешел к усредненным функциям Грина, для которых имелась диаграммная техника, введенная в работах Эдвардса [13] и Абрикосова и Горькова [14]. Такой подход был более привычен для большинства теоретиков, и объяснение Займана было сочтено удовлетворительным. Однако вскоре появилась работа Ллойда [15], в которой была найдена точная усредненная функция Грина для уравнения (1.1) с распределением энергий узлов вида

$$P(V_x) = \frac{1}{\pi} \frac{W}{V_x^2 + W^2}. \quad (1.7)$$

В импульсном представлении запаздывающая функция Грина имела простой вид

$$\langle G(p, E) \rangle = \frac{1}{E - \epsilon(p) + iW} \quad (1.8)$$

и не обнаруживала никаких особых точек по энергии  $E$  или амплитуде случайного потенциала  $W$ , что ставило под сомнение результат Андерсона. Последний выступил с разъяснениями, что его утверждение относилось именно к типичной, а не усредненной функции Грина, а необходимость различать типичные и средние значения он специально подчеркивал в работе 1958 года. Суть дела состоит в том, что если распределение  $P(X)$  случайной величины  $X$  имеет при больших  $X$  медленно меняющийся степенной хвост, то ее среднее значение, определяемое интегралом  $\int_0^\infty XP(X) dX$ , может не иметь ничего общего с типичными значениями величины  $X$ , получаемыми при ее измерении.

Позже Эконому и Коэн показали [16], что подход в терминах усредненных величин также возможен, но требует осторожности. Действительно, функция Грина  $G(x, x')$  определяет амплитуду перехода из точки  $x$  в точку  $x'$ , тогда как для кинетики важна вероятность такого перехода; использование среднего  $\langle |G(x, x')|^2 \rangle$  позволяет ввести критерий локализации, фактически эквивалентный критерию Андерсона, тогда как среднее  $\langle G(x, x') \rangle$  к кинетике отношения не имеет.

Средняя функция Грина определяет, однако, непосредственно наблюдаемую величину — плотность состояний  $\nu(E)$ , и регулярность последней в точке, являющейся особой для проводимости, представляет собой поистине удивительный факт. Этот факт является в настоящее время общепризнанным, хотя и остается недоказанным в общем случае. Физически он обусловлен тем [17], что средняя функция Грина  $\langle G(x, x') \rangle$ , зависящая от разности аргументов  $x - x'$ , в области слабого беспорядка пропорциональна  $\exp(-|x - x'|/l)$  и является короткодействующей [14]. Согласно Мотту [2], длина пробега  $l$  сохраняет свой смысл и в области сильного беспорядка (хотя и не может вычисляться на основе кинетического уравнения) и с увеличением беспорядка может лишь

уменьшаться. Следовательно,  $\langle G(x, x') \rangle$  всегда остается короткодействующей и "не чувствует" термодинамического предельного перехода, в котором только и возникают сингулярности физических величин<sup>1</sup> [9–11]. Напротив, величина

$$\phi(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\mathbf{r}_4) = \langle G_{E+\omega}^R(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)G_E^A(\mathbf{r}_3\mathbf{r}_4) \rangle, \quad (1.9)$$

содержащая всю информацию о кинетических свойствах, имеет дальнедействующий характер, что связано с наличием в ее фурье-образе диффузионных полюсов [19].

Таким образом, задачи о вычислении плотности состояний и проводимости неупорядоченной системы представляют собой две существенно различные проблемы: в первом случае требуется решение средней функции Грина  $\langle G(x, x') \rangle$ , определяемой диаграммным рядом (рис. 1а), которое стандартным образом сводится к вычислению собственной энергии  $\Sigma$ :

$$\langle G_E^{R,A}(\mathbf{k}) \rangle \equiv G_{\mathbf{k}}^{R,A} = \frac{1}{E - \epsilon_{\mathbf{k}} - \Sigma_{\mathbf{k}}^{R,A}}, \quad (1.10)$$

ряд для которой содержит лишь неприводимые диаграммы (рис. 1б). Кинетические свойства неупорядоченной системы связаны с величиной  $\phi$ , которая определяется совокупностью диаграмм с четырьмя концами, построенных на линиях  $G^R$  и  $G^A$  (рис. 2а), и по свойствам аналогична двухчастичной функции Грина теории взаимодействующих частиц. Для нее справедливо уравнение Бете–Солпитера (рис. 2б), содержащее неприводимую вершину  $U$  (рис. 2в) и в импульсном представлении имеющее вид:

$$\phi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q}) = G_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}^R G_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}^A \left[ N\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}_1} U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}(\mathbf{q})\phi_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}'}(\mathbf{q}) \right]. \quad (1.11)$$

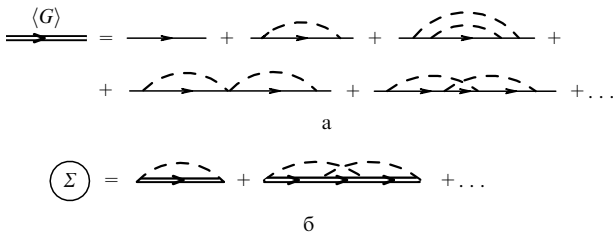


Рис. 1. Диаграммы для средней функции Грина  $\langle G \rangle$ , соответствующие гауссову случайному потенциалу [9] или борновскому приближению для случайно расположенных примесей [14] (а); ряд для собственной энергии  $\Sigma$  содержит лишь неприводимые диаграммы (б).

<sup>1</sup> Аргумент с моделью Ллойда при ближайшем рассмотрении не кажется слишком убедительным. Модель Ллойда в математическом плане является сильно вырожденной — она обладает специфической диаграммной техникой (в которой обращаются в нуль все диаграммы с пересечениями примесных линий), а при применении метода реплик сводится к гауссову функциональному интегралу (ср. с (1.14)). Не высказано никаких соображений, что специфика модели Ллойда обусловлена физической сутью проблемы; наоборот, в иерархических моделях [18] можно явно продемонстрировать, что потенциалы с бесконечной дисперсией относятся к другому классу универсальности.

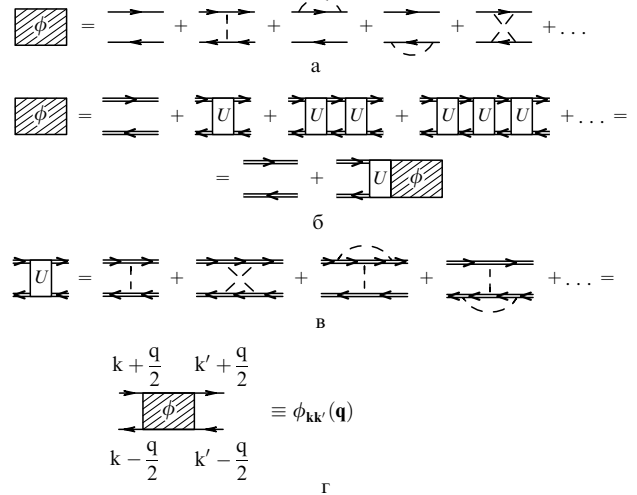


Рис. 2. Диаграммный ряд для величины  $\phi$  (а), графическое изображение уравнения Бете–Солпитера (б) и определение неприводимой вершины  $U$  (в). Пояснение трехимпульсных обозначений (г).

Здесь предполагается, что энергетическая переменная равна  $E + \omega$  для функций  $G^R$  и  $E$  для функций  $G^A$ , и введены трехимпульсные обозначения (рис. 2г).

В действительности две указанные проблемы не являются вполне независимыми. Исследование в паркетном приближении показывает [5, 20], что математические трудности в обоих случаях имеют одну природу и связаны с проблемой "ложного полюса" (см. раздел 3). С другой стороны, существует тождество Уорда [21]

$$\Delta \Sigma_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}'} U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q}) \Delta G_{\mathbf{k}'}(\mathbf{q}), \quad (1.12)$$

$$\Delta G_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) \equiv G_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}^R - G_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}^A, \quad \Delta \Sigma_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) \equiv \Sigma_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}^R - \Sigma_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}^A, \quad (1.13)$$

связывающее собственную энергию  $\Sigma_{\mathbf{k}}$  и неприводимую вершину  $U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q})$ . Из вывода тождества Уорда, приведенного в работе [21], ясно, что оно выполняется *подиаграммно*, и потому требуется строгое соответствие диаграмм, учитываемых при вычислении  $\Sigma_{\mathbf{k}}$  и  $U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q})$ : например, при учете первой диаграммы на рис. 1б требуется учет первой диаграммы на рис. 2в, при учете второй диаграммы на рис. 1б требуется учет второй, третьей, четвертой диаграмм на рис. 2в и т.д. Поэтому никакое приближение, используемое для вычисления проводимости, не может быть самосогласованным, пока не сформулировано соответствующее приближение для плотности состояний.

В 70-е годы происходит постепенное осознание [3, 22–24] фундаментального характера проблемы перехода Андерсона и ее глубокой связи с флуктуационной теорией фазовых переходов [9–11]. Наиболее ярко это проявилось в установлении формальной математической эквивалентности задачи о вычислении средней функции Грина для уравнения (1.4) с гауссовым случайным потенциалом (1.2) в континуальном пределе  $a_0 \rightarrow 0$ ,  $a_0^d W^2 \rightarrow \text{const}$  с задачей о фазовом переходе второго рода с  $n$ -компонентным параметром порядка  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  в пределе  $n \rightarrow 0$ : в этом можно убедиться путем сравнения диаграммных разложений

[9, с. 225] или путем перехода к функциональному интегралу с помощью метода реплик [25]. При этом коэффициенты в гамильтониане Гинзбурга – Ландау

$$H\{\varphi\} = \int d^d x \left( \frac{1}{2} c |\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{2} \kappa_0^2 |\varphi|^2 + \frac{1}{4} g_0 |\varphi|^4 \right) \quad (1.14)$$

связаны с параметрами неупорядоченной системы соотношениями

$$c = \frac{1}{2m}, \quad \kappa_0^2 = -E, \quad g_0 = -\frac{W^2 a_0^d}{2}. \quad (1.15)$$

Как обычно, коэффициент при  $|\nabla\varphi|^2$  положителен, коэффициент при  $|\varphi|^2$  меняет знак в окрестности фазового перехода (последний при слабом беспорядке и  $d > 2$  лежит вблизи затравочного края спектра, от которого отсчитывается энергия  $E$ ), однако коэффициент при  $|\varphi|^4$  имеет "неправильный" знак. Последнее обстоятельство мешает непосредственному перенесению результатов из теории фазовых переходов в физику неупорядоченных систем; оно приводит к бессмысленности традиционной теории среднего поля и необходимости последовательного флуктуационного рассмотрения во всей области параметров<sup>2</sup>.

Для вычисления коррелятора  $\langle G^R G^A \rangle$ , определяющего проводимость, следует использовать эффективный гамильтониан для двух нуль-компонентных полей  $\varphi$  и  $\phi$  [25], также исследуемый в теории фазовых переходов [26]:

$$H\{\varphi, \phi\} = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} c |\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{2} c |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2} \kappa_1^2 |\varphi|^2 + \frac{1}{2} \kappa_2^2 |\phi|^2 + \frac{1}{4} g_0 (|\varphi|^2 + |\phi|^2)^2 \right], \quad (1.16)$$

где  $\kappa_1^2 = -E - \omega - i\delta$ ,  $\kappa_2^2 = -E + i\delta$ .

По аналогии с теорией фазовых переходов можно надеяться на построение для гамильтонианов (1.14), (1.16) простой теории для пространства размерности  $d = 4 - \epsilon$ ; такие попытки предпринимались в середине 70-х годов, но не дали ожидаемых результатов: ренорм-групповой анализ обнаружил отсутствие неподвижных точек, лежащих в области применимости теории [25], а паркетная формулировка столкнулась с проблемой "ложного" полюса [5, 20, 27]. Полученные Вегнером [28] неравенства для критических индексов показали несостоятельность прямых качественных аналогий с теорией фазовых переходов.

Неудачные попытки построения  $(4 - \epsilon)$ -мерной теории [25, 27] способствовали распространению точки зрения, что верхняя критическая размерность  $d_{c2}$  для перехода Андерсона (т.е. размерность, выше которой теория существенно упрощается) отлична от четырех. Таулес [29] высказал соображения, что факты, указываю-

щие на выделенность размерности  $d = 4$ , генетически связаны с предельным переходом к потенциалу типа "гауссовский белый шум" (т.е. континуальному пределу  $a_0 \rightarrow 0$ ,  $a_0^d W^2 \rightarrow \text{const}$  в уравнении (1.4)) и свидетельствуют лишь о нефизичности последнего. Соображения Таулеса стимулировали выдвижение гипотез, что  $d_{c2} = 6$  [30],  $d_{c2} = 8$  [31, 32] и  $d_{c2} = \infty$  [33–35]. Отсутствие единства мнений о величине  $d_{c2}$  сопровождалось отсутствием конструктивных идей относительно того, каким образом условие  $d > d_{c2}$  может приводить к упрощению проблемы, т.е. какой характер имеет в данном случае "теория среднего поля".

Для задачи о плотности состояний вблизи перехода Андерсона вопрос о верхней критической размерности и возможности построения  $\epsilon$ -разложения вблизи нее исчерпывающим образом решен в недавних работах автора [36–39]: сделано утверждение, что  $d_{c2} = 4$ , показано, каким образом условие  $d > 4$  приводит к упрощению проблемы, исследован характер сингулярности при  $d = 4$  и построена  $(4 - \epsilon)$ -мерная теория. Целью настоящего обзора является систематизация этих результатов. Более подробно по сравнению с оригинальными работами освещена исходная проблематика (разделы 2, 3), изложены основные идеи и полученная качественная картина (раздел 4). В разделе 5 обсуждаются методы исследования высоких порядков теории возмущений, которые применимы к широкому кругу задач и, на наш взгляд, слабо используются в настоящее время. В разделе 6 излагается структура  $(4 - \epsilon)$ -мерной теории: по возможности это делается без ссылок на результаты для высших размерностей. Наконец, в разделе 7 обсуждаются перспективы применения метода  $\epsilon$ -разложения к исследованию кинетических свойств вблизи перехода Андерсона.

## 2. Выделенность размерности $d = 4$

В случае слабого беспорядка порог подвижности лежит в окрестности затравочной границы спектра, где случайный потенциал может считаться гауссовым ввиду возможности усреднения по масштабам, малым по сравнению с длиной волны электрона, но большим по сравнению с расстоянием между рассеивателями (так называемый гауссовский участок спектра [40]). В пространствах высокой размерности дискретность решетки имеет принципиальное значение, поэтому в дальнейшем имеем в виду модель Андерсона (1.1) с гауссовым распределением энергий узлов (1.2); беспорядок считаем слабым и интересуемся областью малых энергий

$$W \ll J, \quad |E| \ll J, \quad (2.1)$$

где  $E$  отсчитывается от нижнего края зоны.

Выделенность для гауссовой модели (1.1) размерности пространства  $d = 4$  может быть обнаружена с различных точек зрения.

**Принцип Иоффе – Регеля.** Условие отсутствия локализации дается известным принципом Иоффе – Регеля [2]

$$pl \gtrsim 1 \quad \text{или} \quad E\tau \gtrsim 1, \quad (2.2)$$

где  $E$  и  $p$  — энергия и импульс электрона,  $l$  и  $\tau$  — длина и время свободного пробега. В борновском приближении

$$\tau^{-1}(E) \sim a_0^d W^2 v_0(E), \quad (2.3)$$

<sup>2</sup> При использовании диаграммной техники отрицательность  $g_0$  не существенна, так как разложение проводится по целым степеням  $g_0$ . Функциональные интегралы с  $g_0 < 0$  понимаются в смысле аналитического продолжения с положительных  $g_0$ . Фактически, как объяснялось в [25], при применении метода реплик можно избежать появления расходящихся функциональных интегралов за счет произвола в выборе поля  $\varphi$ : этим и определяется способ аналитического продолжения.

где

$$v_0(E) \sim (a_0^d J)^{-1} \left(\frac{E}{J}\right)^{(d-2)/2} \quad (2.4)$$

— плотность состояний идеальной решетки; при  $d < 4$  условие (2.2) сводится к

$$E \gtrsim J \left(\frac{W}{J}\right)^{4/(4-d)}, \quad (2.5)$$

тогда как при  $d > 4$  оно в указанных предположениях выполняется для всех  $E$ .

**Аналогия с теорией фазовых переходов.** Проблема перехода Андерсона может быть математически точно переформулирована в терминах эффективных гамильтонианов (1.14), (1.16), которые лишь знаком  $g_0$  отличаются от эффективных гамильтонианов теории фазовых переходов второго рода, где роль размерности  $d = 4$  хорошо известна: при  $d > 4$  становится точной теория среднего поля Ландау. При  $g_0 < 0$  теория среднего поля не имеет смысла, но некоторые указания на сохранение выделенности размерности  $d = 4$  можно получить из вильсоновской ренормгруппы (рис. 3). При всех  $d$  преобразование ренормгруппы имеет гауссову неподвижную точку  $g_0 = 0$ ; кроме того, для  $d$  близких к 4 удается продемонстрировать существование нетривиальной неподвижной точки  $g_0 = g^*(d)$ . При  $d = 4$  две указанные неподвижные точки "обмениваются устойчивостью", так что при  $d > 4$  устойчива первая и неустойчива вторая, а при  $d < 4$  — наоборот. На рисунке 3 стрелками указано изменение "заряда"  $g_0$  при преобразованиях ренормгруппы. Если начальное значение  $g_0$  отрицательно, то при  $d < 4$  вильсоновская неподвижная точка  $g^*$  оказывается недостижимой, что указывает на неприменимость прямых аналогий с теорией фазовых переходов [25]. Однако при  $d > 4$  и небольших отрицательных  $g_0$  система приближается к гауссовой неподвижной точке, что свидетельствует об относительной простоте теории.

Фактически, ситуация оказывается более сложной: при отрицательных  $g_0$  в уравнениях вильсоновской ренормгруппы нужно учитывать непертурбативные

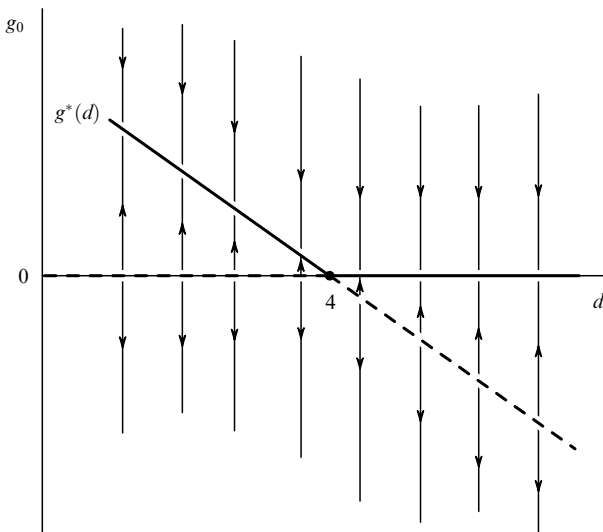


Рис. 3. Изменение "заряда"  $g_0$  при преобразованиях ренормгруппы.

вклады, которые приводят к ее полному разрушению. Тем не менее сказанное выше отчетливо демонстрирует различие трансформационных свойств для размерностей больших и меньших четырех.

**Метод оптимальной флуктуации.** При больших отрицательных  $E$  свойства локализованных состояний могут быть исследованы методом оптимальной флуктуации Лифшица [8, 40]. В силу (1.2) вероятность флуктуационного возникновения потенциальной ямы глубиной  $V$  и радиусом  $R$  имеет порядок<sup>3</sup>

$$P(V, R) \sim \exp\left(-\frac{V^2 R^d}{W^2 a_0^d}\right). \quad (2.6)$$

При наличии в яме уровня  $E = -|E|$  параметры  $V$  и  $R$  связаны соотношением

$$E = -V + \frac{1}{mR^2} \approx -V + J\left(\frac{a_0}{R}\right)^2, \quad (2.7)$$

что позволяет исключить  $V$  из (2.6):

$$P(E, R) \sim \exp\left\{-\left(\frac{R}{a_0}\right)^d \left[\frac{|E| + J(a_0/R)^2}{W}\right]^2\right\} \equiv \exp[-S(E, R)]. \quad (2.8)$$

Чтобы получить полную вероятность  $P(E)$  возникновения уровня  $E$ , определяющую плотность состояний  $v(E)$ , надо проинтегрировать выражение (2.8) по  $R$ , что в перевальном приближении сводится к замене  $R$  на  $R_0$  — точку минимума функции  $S(E, R)$ : при  $d < 4$  радиус оптимальной флуктуации  $R_0$  имеет порядок  $|E|^{-1/2}$  (рис. 4а) и расходится при  $|E| \rightarrow 0$ , что приводит к известному закону Лифшица

$$v(E) \sim \exp[-\text{const } |E|^{(4-d)/2}]. \quad (2.9)$$

При  $d > 4$  (рис. 4а) экстремум  $S(E, R)$  достигается при минимально возможном  $R$ , т.е.  $R_0 \sim a_0$ , откуда следует

$$v(E) \sim \exp\left[-\frac{(J + |E|)^2}{W^2}\right]. \quad (2.10)$$

Поскольку экстремум достигается на границе области определения, то производная по  $R$  от функции  $S(E, R)$  не обращается в нуль; в теоретико-полевой формулировке [20, 41–43] этому соответствует отсутствие классических решений — инстантонов [44].

При  $d = 4$  (рис. 4б) функция  $S(E, R) = \text{const} = S_0$  при  $E = 0$ , и ситуация близка к вырождению: при больших  $R$  вырождение снимается за счет конечности  $E$ ,  $S(E, R) - S_0 \sim E^2 R^d$ , при малых  $R$  становится существенным поведение спектра  $\epsilon(p)$  при больших  $p$ . Если в разложении  $\epsilon(p)$  по  $p$  наряду с членами порядка  $p^2$  учесть члены порядка  $p^4$ , то вместо (2.7) получим

$$E = -V + J\left(\frac{a_0}{R}\right)^2 + \beta J\left(\frac{a_0}{R}\right)^4. \quad (2.11)$$

<sup>3</sup> В следующих ниже оценках всюду опускаем коэффициенты порядка 1.

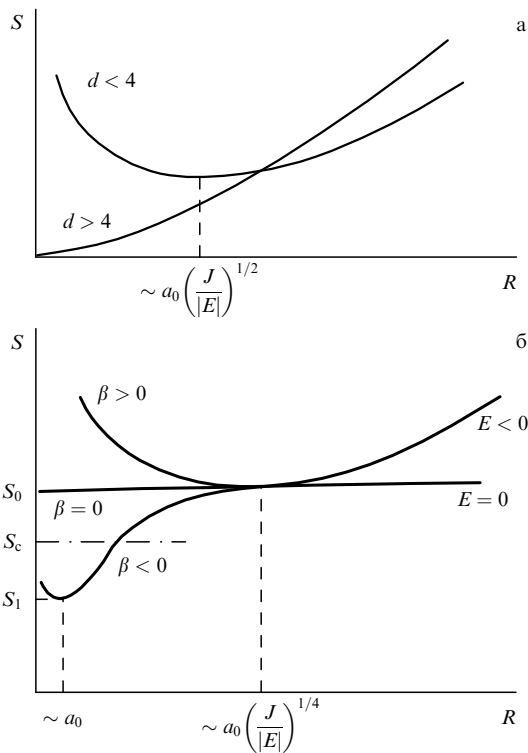


Рис. 4. Зависимость функции  $S(E, R)$  от  $R$  при  $E = \text{const}$ .  $d > 4$  и  $d < 4$  (а);  $d = 4$  (б).

При  $\beta > 0$  функция  $S(E, R)$  отклоняется от значения  $S_0$  вверх, обеспечивая появление минимума при  $R_0 \sim |E|^{-1/4}$ , а при  $\beta < 0$  — вниз, и минимум достигается при  $R_0 \sim a_0$ , где становятся существенными дальнейшие члены разложения  $\epsilon(p)$  по  $p$  (рис. 4б). Мы видим, что переход от высших размерностей пространства к низшим "продолжается" при  $d = 4$  по параметрам модели: при  $\beta < 0$  оптимальная флуктуация локализована на атомном масштабе, аналогично случаю  $d > 4$ , тогда как при  $\beta > 0$  радиус оптимальной флуктуации расходится при  $|E| \rightarrow 0$ , что характерно для низших размерностей. Соответственно, различной оказывается асимптотика флуктуационного хвоста при  $E \rightarrow -\infty$

$$v(E) \sim \begin{cases} \exp\left[-\frac{J^2}{W^2}\left(1 + \frac{|E|}{J}\right)\right], & \beta < 0, \\ \exp\left[-\frac{J^2}{W^2}\left(1 + \frac{|E|^{1/2}}{J^{1/2}}\right)\right], & \beta > 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

В интересующей нас области малых  $E$ , где находится порог подвижности, граница между двумя типами моделей перестает быть резкой. Дело в том, что при  $\beta < 0$  имеет место конкуренция вкладов от минимума с  $S = S_1$  и более высоколежащего плато  $S(E, R) = S_0$ , ширина которого неограниченно увеличивается при уменьшении  $|E|$ . Интегрирование  $P(E, R)$  с учетом обоих вкладов дает результат типа

$$P(E) \sim v(E) \sim \exp(-S_1) + \left(\frac{J}{|E|}\right)^\alpha \exp(-S_0), \quad (2.13)$$

где  $\alpha = 1/2$ . При увеличении  $S_1$  доминирование второго члена (вклада плато) возникает раньше, чем  $S_1$  сравнивается с  $S_0$ , и переход к случаю  $\beta > 0$ , сопровождающий-

ся исчезновением первого члена в (2.13), не имеет существенных последствий. Полученное значение индекса  $\alpha$  нельзя воспринимать серьезно, так как точность метода не позволяет оценивать предэкспоненту; его точное значение может быть установлено из соображений перенормируемости и равно  $1/3$  (см. конец раздела 4.3).

Затухание  $\Gamma$ , определяемое мнимой частью собственной энергии  $\Sigma(p, \kappa)$  при  $p = 0$  ( $\kappa$  — перенормированное значение величины  $\kappa_0$ ), в области применимости метода оптимальной флуктуации пропорционально плотности состояний  $\nu(E)$  и с учетом размерности дается оценкой

$$\Gamma \sim J \left[ \exp(-S_1) + \left(\frac{J}{|E|}\right)^{1/3} \exp(-S_0) \right]. \quad (2.14)$$

Энергия всегда входит в комбинации  $E + i\Gamma$ , и в окрестности перехода Андерсона можно  $|E|$  заменить на  $\Gamma$ ; легко видеть, что первый член в скобках доминирует при  $S_1 < 3S_0/4$ , второй — при обратном неравенстве. Поскольку  $S(E, R) \sim W^{-2}$  (см. (2.8)), то в пределе слабого беспорядка возникает резкая граница  $S_c = 3S_0/4$  между двумя типами моделей: при  $S_1 < S_c$  оптимальная флуктуация определяется атомным масштабом, и дискретность решетки имеет принципиальное значение, аналогично случаю  $d > 4$ ; при  $S_1 > S_c$  существенны флуктуации большого радиуса, и рассмотрение можно вести в континуальной модели с квадратичным спектром: ситуация аналогична таковой для низших размерностей.

**Перенормируемость теории.** Полученная выше классификация моделей прямо связана с перенормируемостью теории. Диаграмма  $N$ -го порядка для собственной энергии  $\Sigma$  имеет размерность по импульсу  $p^r$ , где  $r = 2 + (d - 4)N$ . При  $d > 4$  степень расходимости на больших импульсах возрастает с порядком диаграммы, и теория перенормируема [45] — требуется явное введение параметра обрезания  $\Lambda$ , указывающее на существенность структуры гамильтониана на атомном масштабе. При  $d < 4$  имеем  $r < 2$  для всех  $N$ : при вычитании из каждой диаграммы ее значения при  $p = \kappa = 0$  показатель  $r$  уменьшается на 2, и разность  $\Sigma(p, \kappa) - \Sigma(0, 0)$  не содержит расходимостей, которые поглощаются величиной  $\Sigma(0, 0)$ , приводящей лишь к сдвигу начала отсчета энергии. При  $d = 4$  разность  $\Sigma(p, \kappa) - \Sigma(0, 0)$  содержит логарифмические расходимости, устраняемые перенормировкой заряда и функции Грина [45, 46]; следует, однако, иметь в виду, что в стандартных доказательствах перенормируемости обсуждается лишь область расстояний, больших, чем  $\Lambda^{-1}$ : подразумевается, что масштабы, меньшие  $\Lambda^{-1}$ , не дают  $\delta$ -образных вкладов, существенных при  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Приведенная выше оценка показывает, что это не всегда так: перенормируемый вклад больших расстояний — вклад плато — доминирует лишь при  $S_1 > S_c$ ; в обратном случае он мал по сравнению с перенормируемым вкладом малых расстояний.

Таким образом, существует четыре принципиально различных типа теорий:

- а) перенормируемые теории при  $d > 4$ ;
- б) перенормируемые теории в условиях логарифмической ситуации ( $d = 4$ ,  $S_1 < S_c$ );
- в) перенормируемые теории в условиях логарифмической ситуации ( $d = 4$ ,  $S_1 > S_c$ );
- г) теории, перенормируемые с помощью одного вычитания (суперперенормируемые) при  $d < 4$ .

Использование упрощений, возникающих в высоких размерностях, для построения  $(4 - \epsilon)$ -мерной теории требует последовательного рассмотрения всех четырех перечисленных типов теорий: путь от высших размерностей к низшим описан в разделе 4.

Разумеется, выделенность размерности  $d = 4$  не осталась незамеченной, но зачастую интерпретировалась неправильно. Кажущееся выполнение условия Иоффе – Регеля при всех положительных  $E$  и отсутствие инстантонов в континуальном пределе [44] привело к тому, что в начале 70-х годов сложилось мнение о полном отсутствии при  $d = 4$  локализованных состояний [2, с. 32]. Работа Таулеса [29] содержала в основном критику этой точки зрения: более аккуратное исследование показывает, что локализованные состояния в действительности существуют, но в результате предельного перехода к гауссовскому белому шуму  $a_0 \rightarrow 0$ ,  $a_0^d W^2 \rightarrow \text{const}$  "размазываются" по отрицательной оси энергий с нулевой плотностью, что приводит к сингулярности  $v(E)$  на пороге подвижности. Для любой модели, в которой имеется минимальный масштаб длины, регулярность плотности состояний восстанавливается, что привело Таулеса к мнению (хотя и весьма осторожно высказанному<sup>4</sup>), что размерность пространства  $d = 4$  не является верхней критической; слабость этой точки зрения ясна из того, что все перечисленные выше факты имеют место еще до предельного перехода к белому шуму.

### 3. Проблема "ложного" полюса

Попытки построения  $(4 - \epsilon)$ -разложения для перехода Андерсона предпринимались в середине 70-х годов [25, 27], но столкнулись с серьезными трудностями, в которых обнаружилась глубокая связь с другими проблемами теоретической физики. Известно, что в квантовой электродинамике имеется соотношение, связывающее наблюдаемый заряд  $e$ , входящий в закон Кулона, с "затравочным" зарядом  $e_0$ , входящим в исходный лагранжиан [45, 47]

$$e^2 = \frac{e_0^2}{1 + (2e_0^2/3\pi) \ln(\Lambda/m)}, \quad (3.1)$$

где  $m$  — масса электрона. Параметр обрезания  $\Lambda$  не имеет физического смысла и должен быть устремлен к бесконечности: при этом наблюдаемый заряд  $e$  стремится к нулю при любом значении затравочного заряда  $e_0$ . Этот так называемый "нуль заряда" сначала воспринимался как парадокс, свидетельствующий о каких-то фундаментальных дефектах теории [48]. Его современная интерпретация состоит в том, что  $e_0$  надо понимать как эффективный заряд, относящийся к масштабу расстояний  $\Lambda^{-1}$  и зависящий от  $\Lambda$  так, чтобы в левой части (3.1) всегда получался наблюдаемый заряд  $e$ , т.е.

$$e_0^2(\Lambda) = \frac{e^2}{1 - (2e^2/3\pi) \ln(\Lambda/m)}. \quad (3.2)$$

В результате заряд электрона при уменьшении расстояний до масштабов, меньших комптоновской длины

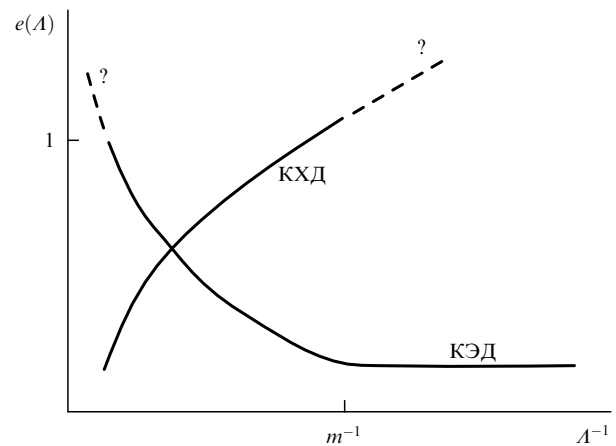


Рис. 5. Зависимость эффективного заряда от масштаба расстояний в квантовой электродинамике (КЭД) и квантовой хромодинамике (КХД).

$m^{-1}$  ( $\equiv \hbar/mc$ ), начинает возрастать (рис. 5). В квантовой хромодинамике (КХД) имеет место формула, аналогичная (3.1), но с обратным знаком в знаменателе, и эффективный заряд не уменьшается с ростом масштаба расстояний, а увеличивается (см. рис. 5). Это объясняет, почему кварки на малых расстояниях ведут себя как свободные (*асимптотическая свобода*), а на больших — взаимодействуют столь сильно, что не могут разлететься (*конфайнмент*). Зависимость эффективного заряда от расстояния может описываться на основе формулы (3.1) лишь при условии его достаточной малости; вопрос о том, чем заменяется формула (3.1), когда заряд возрастает до значений порядка 1 (это происходит в квантовой электродинамике на малых расстояниях, а в КХД — на больших (см. рис. 5)), остается до сих пор нерешенным [49].

Связь проблемы перехода Андерсона с теорией взаимодействующих частиц определяется тем, что в квантовой теории поля модели (1.14) с  $d = 4$ ,  $n = 1$  соответствует известная модель  $\phi^4$ , описывающая релятивистский бозе-газ с точечным взаимодействием [45, 50]; при этом величина  $\kappa$  играет роль массы частицы, а отрицательные значения константы взаимодействия  $g_0$  (притяжение) соответствуют неустойчивой теории поля. Ситуация с перенормируемостью в модели  $\phi^4$  оказывается такой же, как в квантовой электродинамике, и выполняется соотношение, аналогичное (3.1), которое связывает перенормированный заряд  $g$ , описывающий взаимодействие на больших расстояниях, с его затравочным значением  $g_0$  [11, 45, 51, 52]:

$$g = \frac{g_0}{1 + K_4(n+8)g_0 \ln(\Lambda/\kappa)}, \quad (3.3)$$

где  $K_4 = (8\pi^2)^{-1}$  — площадь единичной сферы в четырехмерном пространстве, деленная на  $(2\pi)^4$ . Результат (3.3) получается путем суммирования так называемых "паркетных" диаграмм, содержащих максимальную степень большого логарифма [52 – 55]. При  $g_0 > 0$ , т.е. в обычной теории фазовых переходов, эффективное взаимодействие, описываемое соотношением (3.3), стремится к нулю при  $\kappa \rightarrow 0$ , т.е. при приближении к точке перехода, — возникает "нуль заряда", который в данном случае имеет буквальный смысл, так как затравочный заряд  $g_0$  и параметр обрезания  $\Lambda$  соответствуют атомному масш-

<sup>4</sup> "... Both the density of states and the properties of localized states are special in four dimensions ..., but these special features do not seem to make the problems we are interested in any simpler, and so extrapolation from four to three dimensions is not obviously helpful" [29, p. L603].

табу и являются наблюдаемыми. При переходе от  $d = 4$  к  $d = 4 - \epsilon$  заряд  $g$  в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  приобретает конечное, но малое по величине значение; со слабостью эффективного взаимодействия фактически и связан успех  $\epsilon$ -разложения Вильсона, результаты которого прекрасно воспроизводятся в паркетной формулировке теории [52, 56].

Использование паркетного приближения в теории неупорядоченных систем приводит к выражению типа (3.3) с  $g_0 < 0$  [5, 20, 27], и ситуация оказывается асимптотически свободной: при приближении к порогу подвижности эффективное взаимодействие не падает, а растет, и при некотором малом  $\epsilon$  (т.е. малом значении перенормированной энергии  $E$ ) в выражении (3.3) возникает "ложный" полюс, неустраиваемый в рамках паркетного приближения. Формальное использование паркетных результатов типа (3.3) приводит к расходимостям в физических величинах. Таким образом, возникает парадоксальная ситуация: использование одного и того же приближения в двух математически эквивалентных проблемах приводит в одном случае (теория фазовых переходов), по существу, к полному решению задачи, в другом случае (теория неупорядоченных систем) — к явно нефизическим результатам. По мнению Садовского [5, 20], проблема ложного полюса является основной проблемой, препятствующей построению последовательной теории перехода Андерсона. Ниже мы дадим полное решение этой проблемы для задачи о плотности состояний.

## 4. От высших размерностей — к низшим

### 4.1. Упрощение теории при $d > 4$

Из диаграммного ряда для собственной энергии  $\Sigma(p, E)$  (рис. 1б) нетрудно заключить, что увеличение порядка диаграммы на единицу (порядок диаграммы определяется степенью  $g_0$ , т.е. числом примесных линий) приводит к появлению лишнего множителя  $W^2$  и добавлению двух  $G$ -функций. Для последних при проведении оценок можно использовать функциональную форму, которая справедлива в области слабого беспорядка <sup>5</sup> [14]

$$G(p, E) = \frac{1}{E - p^2/2m + i\Gamma}. \quad (4.1)$$

При  $d < 4$  расходимости на больших импульсах устраняются в силу перенормируемости теории, и интегралы определяются малыми значениями  $p$ ; поэтому в интересующей нас области малых  $E$  функцию Грина следует считать величиной порядка  $1/\Gamma$ . При слабом беспорядке затухание  $\Gamma$  является малым в меру малости  $W$  и, оказываясь в знаменателе, может скомпенсировать малость множителя  $W^2$ . Детальные оценки показывают, что именно это и происходит в окрестности порога подвижности, так что при  $|E| \sim \Gamma$  фактический параметр разложения оказывается порядка единицы.

При  $d > 4$  ситуация меняется: ввиду неперенормируемости теории интегралы определяются большими импульсами  $p \sim \Lambda$ , и функцию Грина (4.1) можно считать величиной порядка  $1/J$ ; поэтому параметр разложения

при слабом беспорядке оказывается малым

$$\frac{W^2}{J^2} \ll 1. \quad (4.2)$$

Однако наличие малого параметра не приводит к очевидным упрощениям, так как попытка ограничиться конечным порядком теории возмущений приводит к потере флуктуационного хвоста. Приближение, дающее асимптотически точные результаты во всей области энергий, было найдено в работе автора [36]: ряд теории возмущений для  $\Sigma$  нужно аппроксимировать первым членом и суммой удаленных членов ряда — от некоторого большого  $N_0$  до бесконечности. Последние члены дают вклад, связанный с расходимостью ряда и потому не зависящий от  $N_0$ .

Расходимость ряда теории возмущений прямо связана с существованием флуктуационного хвоста плотности состояний. Действительно, при гауссовом распределении энергий узлов (1.2) с конечной вероятностью существуют сколь угодно глубокие флуктуации потенциала — и, следовательно, сколь угодно глубокие уровни энергии — при сколь угодно малом  $W$ , т.е. плотность состояний  $\nu(E) \sim \text{Im } G(E + i\delta)$  отлична от нуля при всех  $E$  и  $W$ . Отсюда

$$G(E + i\delta) - G(E - i\delta) = \text{const} \times \nu(E) \neq 0 \quad \text{для всех } E, g_0 < 0, \quad (4.3)$$

т.е. точная функция Грина  $G(E)$  имеет разрез при отрицательных  $E$ , которого не имела невозмущенная функция Грина  $G_0(E)$ . По известной теореме анализа, сумма ряда, составленного из непрерывных функций, непрерывна при условии его равномерной сходимости; равномерная сходимость имеет место, если функциональный ряд мажорируется сходящимся числовым рядом [57]. Если коэффициенты разложения  $G(E)$  по степеням  $g_0$  растут медленнее, чем  $a^N$  с некоторым конечным  $a$ , то при малых  $|g_0|$  ряд мажорируется сходящейся геометрической прогрессией и сходится равномерно; тогда из непрерывности членов ряда, вытекающей из непрерывности  $G_0(E)$ , следует невозможность неравенства (4.3). Поэтому коэффициенты разложения растут быстрее, чем  $a^N$  со сколь угодно большим  $a$ , и ряд расходится при сколь угодно малых  $|g_0|$ . Фактически, расходимость оказывается факториальной, что связано с факториально большим числом диаграмм одинакового порядка.

Вычисление далеких членов ряда теории возмущений возможно с помощью метода Липатова [58], который основан на следующей простой идее. Коэффициенты  $F_N$  разложения функции  $F(g)$

$$F(g) = \sum_{N=0}^{\infty} F_N g^N \quad (4.4)$$

могут определяться по формуле

$$F_N = \int_C \frac{dg}{2\pi i} \frac{F(g)}{g^{N+1}}, \quad (4.5)$$

где контур  $C$  охватывает точку  $g = 0$  в комплексной плоскости. Переписывая знаменатель в виде  $\exp[-(N+1) \ln g]$ , имеем при больших  $N$  экспоненту с большим показателем, что позволяет надеяться на

<sup>5</sup> В дальнейшем всюду, где это существенно, имеется в виду запаздывающая функция Грина.



использование метода перевала. Применим (4.5) к функциональному интегралу

$$F(g) = \int D\varphi \exp(-H\{g, \varphi\}),$$

$$H\{\varphi\} = H_0\{\varphi\} + gH_{\text{int}}\{\varphi\}. \tag{4.6}$$

Тогда

$$F_N = \int_C \frac{dg}{2\pi i} \int D\varphi \exp[-H_0\{\varphi\} - gH_{\text{int}}\{\varphi\} - (N + 1) \ln g]. \tag{4.7}$$

Идея метода Липатова состоит в том, что перевал в (4.7) ищется *одновременно* по  $g$  и  $\varphi$ ; он существует для большинства представляющих интерес гамильтонианов  $H\{g, \varphi\}$  и реализуется на некоторой локализованной в пространстве функции  $\varphi(x)$  (называемой *инстантоном*), причем условия применимости перевального приближения оказываются выполненными при больших  $N$  независимо от его применимости к исходному интегралу (4.6). Это в корне меняет дело: если точное вычисление функциональных интегралов, как правило, невозможно, то в перевальном приближении они могут быть вычислены всегда.

Диаграммный ряд для функции Грина неупорядоченной системы (рис. 1а) с помощью метода реплик представляется в виде функционального интеграла с гамильтонианом (1.14), что и дает возможность вычисления его далеких членов методом Липатова. Переход от разложения для  $G(p, E)$  к разложению для собственной энергии  $\Sigma(p, E)$  не представляет трудностей, так как для факториальных рядов существует простая алгебра, позволяющая работать с ними так же просто, как с конечными выражениями (см. раздел 5.3). Для  $N$ -го коэффициента разложения  $\Sigma(p, E)$  получается функциональная форма

$$c\Gamma(N + b)a^N, \tag{4.8}$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция,  $a = a(E)$ ,  $b = \text{const}$ ,  $c = c(p, E)$ . Расходящийся ряд формально суммируется путем представления гамма-функции в виде определяющего ее интеграла и суммирования возникающей геометрической прогрессии<sup>6</sup>:

$$\sum_{N=N_0}^{\infty} c\Gamma(N + b)(ag_0 + i\delta)^N = \sum_{N=N_0}^{\infty} c \int_0^{\infty} dx \exp(-x)x^{N+b+1}(ag_0 + i\delta)^N =$$

$$= c \int_0^{\infty} dx \exp(-x)x^{b-1} \frac{(xag_0)^{N_0}}{1 - x(ag_0 + i\delta)} =$$

$$= c \int_0^{\infty} dy \frac{\exp(-1/y)}{y^b} \left(\frac{ag_0}{y}\right)^{N_0} \frac{1}{y - ag_0 - i\delta}. \tag{4.9}$$

Бесконечно малая мнимая добавка  $i\delta$  в (4.9) происходит из двух источников (оба дают для нее одинаковый знак): от мнимой добавки  $+i\delta$  или  $-i\delta$  к энергии  $E$ , которая конкретизирует выбор функции Грина (запаздывающая или опережающая), и от мнимой добавки к  $g_0$ , указывающей способ аналитического продолжения с положительных  $g_0$  на отрицательные, которое для запаздывающей и опережающей функции Грина делается через нижнюю или верхнюю полуплоскость, соответственно [25]. Нетрудно проверить, что действительная часть суммы (4.9) при малых  $g_0$  хорошо аппроксимируется первым членом ряда, и для нее проводить суммирование далеких членов фактически не требуется. Более интересный результат получается для мнимой части суммы:

$$\text{Im} \sum_{N=N_0}^{\infty} c\Gamma(N + b)(ag_0 + i\delta)^N = \frac{\pi c}{(ag_0)^b} \exp\left(-\frac{1}{ag_0}\right),$$

$$ag_0 > 0. \tag{4.10}$$

Формула (4.10) иллюстрирует несколько любопытных моментов:

а) каждый член ряда в левой части (4.10) имеет бесконечно малую мнимую часть  $\sim i\delta$ , которая в результате суммирования ряда превращается в конечное выражение;

б) в правой части формулы (4.10) стоит типичный "непертурбативный" вклад, который не может быть разложен в обычный степенной ряд, но, как легко видеть, прекрасно представляется расходящимся рядом. Фактически, выражение (4.10) дает механизм извлечения непертурбативных вкладов из диаграммной техники, возможность которого подвергалась сомнению даже в очень серьезных работах (см., например, [60]);

в) правая часть выражения (4.10) не зависит от  $N_0$ , т.е. непертурбативный вклад набирается от области сколь угодно больших  $N$ ;

г) как мы увидим, для гамильтониана (1.14) коэффициент  $a$  отрицателен, и непертурбативный вклад возникает лишь при  $g_0 < 0$ . Это объясняет, почему в обычной теории фазовых переходов игнорирование факториальной расходимости ряда теории возмущений не приводит к существенным последствиям.

Учет непертурбативного вклада приводит к восстановлению флуктуационного хвоста плотности состояний, который терялся при обрыве ряда на конечном числе членов: уже из (4.10) видно, что функциональная форма правой части соответствует результатам метода оптимальной флуктуации (2.10), (2.12), чем устанавливается на количественном уровне отмеченная выше связь расходимости ряда с наличием флуктуационного хвоста. В дальнейшем эта связь обнаружится на еще более высоком уровне: уравнение инстантона в методе Липатова окажется совпадающим с уравнением типичной волновой функции в поле оптимальной флуктуации [40, гл. 4]. Соответственно, данная выше классификация моделей (рис. 4а, б) проявится еще в одном фундаментальном аспекте — в характере расходимости ряда теории возму-

<sup>6</sup> Хорошо известно, что если по отношению к расходящимся рядам считать допустимыми любые формальные манипуляции, то их можно просуммировать к любой наперед заданной сумме. Теория расходящихся рядов [59] исходит из идеи, что на такие манипуляции нужно наложить некоторые ограничения, вследствие которых сумма ряда не будет зависеть от способа суммирования. Полного решения этой проблемы (на уровне необходимых и достаточных условий), по видимому, еще не существует, но для практических вычислений известно достаточно много: имеется длинный список "хороших" преобразований, для которых доказаны теоремы совместности, так что если расходящийся ряд приведен к конечной сумме с использованием преобразований из этого списка, то результат не зависит от способа суммирования. Фактически, в (4.9) используется известное преобразование Бореля, входящее в указанный список.

щений. Существование непертурбативного вклада устраняет все отмеченные выше парадоксальные моменты. В результате становится возможным вычисление плотности состояний при всех энергиях и доказательство ее регулярности на пороге подвижности.

**4.2. Четырехмерные неперенормируемые (решеточные) модели**

При  $d = 4$  все диаграммы для собственной энергии  $\Sigma(p, \kappa)$  ( $\kappa$  — перенормированное значение величины  $\kappa_0$ ) расходятся квадратично. Квадратичные расходимости устраняются путем вычитания из каждой диаграммы ее значения при  $p = 0, \kappa = 0$ ; разность  $\Sigma(0, \kappa) - \Sigma(0, 0)$  расходится лишь логарифмически. Классифицируя вклады диаграмм по степеням логарифмов, получим для  $p = 0$ :

$$\Sigma(0, \kappa) = \Sigma(0, 0) + \kappa^2 \sum_{N=1}^{\infty} g_0^N \sum_{K=0}^N A_N^K \left( \ln \frac{A}{\kappa} \right)^K, \quad (4.11)$$

$$\Sigma(0, 0) = A^2 \sum_{N=1}^{\infty} B_N g_0^N.$$

В  $N$ -м порядке теории возмущений имеются все степени логарифмов, от нулевой до некоторой максимальной, которая определяется паркетными графиками, и в данном случае равна порядку диаграммы  $N$ . В плоскости  $(N, K)$  каждой целочисленной точке, лежащей не выше главной диагонали, соответствует коэффициент  $A_N^K$  (рис. 6а). Для точного решения задачи требуется знание всех этих коэффициентов; мы же будем ставить целью получение результатов, лишь асимптотически точных в пределе слабого беспорядка. В теории фазовых переходов ( $g_0 > 0$ ) такие результаты получают, ограничиваясь в формуле (4.11) паркетными коэффициентами  $A_N^N$ , которые соответствуют старшим степеням больших логарифмов; их нетрудно получить (см. [37]) из результатов работы Гинзбурга [52]:

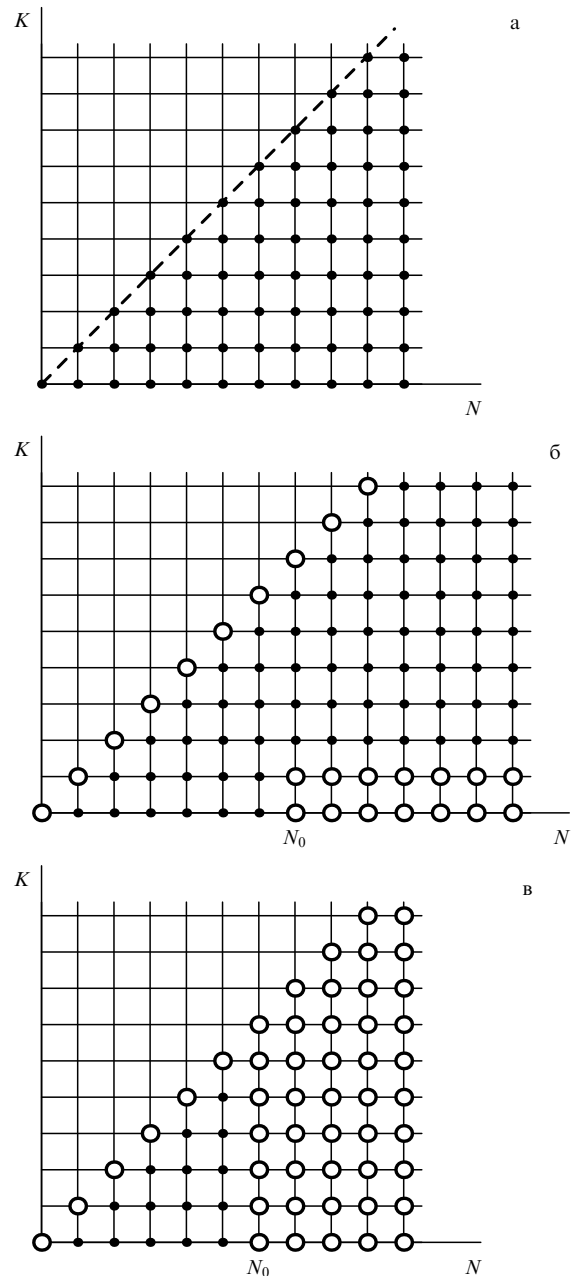
$$A_N^N = [-K_4(n+8)]^N \frac{\Gamma(N-\beta_0)}{\Gamma(N+1)\Gamma(-\beta_0)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(-\beta_0)} [-K_4(n+8)]^N N^{-\beta_0-1}, \quad (4.12)$$

где  $\beta_0 = (n+2)/(n+8)$ . Результат (4.12) вскрывает причину неудовлетворительности паркетного приближения при  $g_0 < 0$ : паркетные коэффициенты не имеют факториального роста, и ограничение ими приводит к потере флуктуационного хвоста. Из доказанной выше расходимости ряда ясно, что члены с низшими степенями логарифмов имеют более высокую скорость роста и при больших  $N$  становятся доминирующими.

В принципе, можно сделать второе, третье и т.д. логарифмическое приближение, учитывая в выражении (4.12) коэффициенты  $A_N^{N-1}, A_N^{N-2}$  и т.д. Эти коэффициенты неявно определяются при вычислении высших членов  $\epsilon$ -разложения методом Вильсона, основанным на существовании при  $d = 4 - \epsilon, g_0 > 0$  точной ренормгруппы [9, гл. 9]; при конечном  $K$  и  $N \rightarrow \infty$  имеем

$$A_N^{N-K} = \text{const} [-K_4(n+8)]^N N^{-\beta_0-1} (N \ln N)^K. \quad (4.13)$$

Мы видим, что факториальный рост не возникает ни в каком конечном логарифмическом приближении; он



**Рис. 6.** В плоскости  $(N, K)$  каждой целочисленной точке, лежащей не выше главной диагонали, соответствует член  $\sim g_0^N \ln^K(A/\kappa)$  в сумме (4.11) (а); члены, которые нужно учесть (светлые точки) для получения асимптотически точных (в пределе слабого беспорядка) результатов для неперенормируемого класса моделей (б); то же для перенормируемых моделей (в).

угадывается при  $K \sim N$ , когда формула (4.13) уже неприемнима.

Информация о наиболее быстро растущих коэффициентах может быть получена методом Липатова. Ситуация оказывается существенно различной для перенормируемого и неперенормируемого классов моделей. В неперенормируемых моделях доминирующим является вклад минимума  $S = S_1$  (рис. 4б), и дискретность решетки имеет принципиальное значение: асимптотика Липатова должна вычисляться для решеточной версии гамильтониана (1.14). Оказывается, что максимальной скоростью роста при  $N \rightarrow \infty$  обладают члены с

нулевой и первой степенями логарифмов, соответствующие коэффициентам  $A_N^0, A_N^1, B_N$ , тогда как члены с более высокими степенями логарифмов растут медленнее и не воспроизводятся главной асимптотикой. Дело в том, что вклад минимума  $S = S_1$  при  $|E| \sim \Gamma$  практически не зависит от энергии (см. первую формулу (2.12)) и должен в основном определяться коэффициентами  $B_N$  в разложении (4.11); коэффициенты  $A_N^0$  и  $A_N^1$  дают слабую энергетическую зависимость, существенную лишь в области больших отрицательных  $E$ .

Чтобы получить асимптотически точное в пределе слабого беспорядка описание всей области энергий, включая окрестность перехода Андерсона, в разложении (4.11) нужно учесть (рис. 6б):

а) паркетные члены, определяемые коэффициентами  $A_N^N$ , как содержащие максимальную степень большого логарифма;

б) начиная с некоторого большого номера  $N_0$  — наиболее быстро растущие члены, соответствующие коэффициентам  $A_N^0, A_N^1, B_N$ . Существенность этих членов связана с расходимостью ряда, поэтому выбор  $N_0$  не имеет значения.

Тогда из (4.11) получается результат

$$\begin{aligned} \Sigma(0, \varkappa) - \text{Re } \Sigma(0, 0) &= \\ &= \varkappa^2 \left[ \left( 1 + 8K_4 g_0 \ln \frac{A}{\varkappa} \right)^{1/4} - 1 \right] + i\Gamma_0(\varkappa), \end{aligned} \quad (4.14)$$

отличающийся от паркетного (первый член в правой части) лишь появлением экспоненциально малого непертурбативного вклада  $i\Gamma_0(\varkappa)$ . Если пренебречь слабой зависимостью последнего от  $\varkappa$ , то его наличие можно интерпретировать как появление мнимой части величины  $\Sigma(0, 0)$ , которая в обычной теории фазовых переходов ( $g_0 > 0$ ) определяет положение точки перехода. Мы видим, что при переходе к отрицательным  $g_0$  основной эффект состоит в появлении мнимой части у "температуры" перехода, т.е. физические величины неупорядоченной системы, определяемые средней функцией Грина, описываются формулами теории фазовых переходов с комплексной  $T_c$ ; последнее обстоятельство обеспечивает обход ложного полюса и регулярность плотности состояний при всех энергиях.

### 4.3. Четырехмерные перенормируемые модели

Использованное выше приближение "портится" при стремлении  $S_1$  к  $S_c$  [37, 38]:

а) уравнение, определяющее  $\Gamma(E)$ , имеет при  $S_1 > S_c$  физически бессмысленные решения;

б) при  $S_1 \rightarrow S_c$  резко возрастает вклад следующих за главным логарифмических приближений, определяемых коэффициентами  $A_N^{N-K}$  с  $K \sim 1$ ;

в) при  $S_1 \approx S_c$  становится существенным вклад плато (рис. 4б), сильная энергетическая зависимость которого указывает на возрастание роли коэффициентов  $A_N^K$  с  $K \neq 0$ .

Таким образом, если в решеточных моделях доминируют самые "старшие" и самые "младшие" логарифмы, то при переходе к перенормируемым моделям в сумме (4.11) становится существенным, вообще говоря, вклад всех  $K$ .

В последнем случае мы приходим к следующей постановке задачи. Выберем целое число  $N_0$ , большое по сравнению с 1, но малое по сравнению с большими

параметрами теории: при  $N < N_0$  сохраним в выражении (4.11) лишь паркетные коэффициенты  $A_N^N$ , выделяемые большими логарифмами; при  $N \geq N_0$  в сумме по  $K$  существенны, вообще говоря, все члены (рис. 6в), но условие  $N \gg 1$  позволяет вычислять коэффициенты  $A_N^K$  в главной асимптотике по  $N$ .

В перенормируемых моделях доминирует вклад плато (рис. 4б), т.е. существенны инстантоны большого радиуса, и вычисление асимптотики Липатова можно производить в континуальной модели. Вклад  $N$ -го порядка в  $\Sigma(0, \varkappa)$  имеет вид

$$\varkappa^2 g_0^N c_2 \Gamma(N + b) a^N (\ln N)^{-\gamma} \exp\left(\frac{\sigma \ln A}{\varkappa}\right), \quad (4.15)$$

где  $a, b, c_2, \sigma$  — константы порядка 1, определенные в разделе 5.5. Сопоставляя с разложением (4.11), имеем

$$A_N^K = \frac{\sigma^K}{K!} A_N^0, \quad A_N^0 = c_2 \Gamma(N + b) a^N (\ln N)^{-\gamma}. \quad (4.16)$$

Если в решеточных моделях асимптотика Липатова воспроизводит лишь нуль-логарифмический и однологарифмический вклады, то здесь она дает "лишние" логарифмы: формально в выражении (4.16)  $K = 0, 1, \dots, \infty$ , тогда как в формуле (4.11)  $K \leq N$ . Причина этого состоит в быстром убывании  $A_N^K$  с ростом  $K$  и ограниченной точности ( $\sim 1/N$ ) главной асимптотики; поэтому результату (4.16) можно доверять лишь при небольших  $K$ .

Для определения коэффициентов  $A_N^K$  с  $K \sim N$  нужно воспользоваться перенормируемостью теории. Поясним основную идею. Пусть  $F$  — некоторая наблюдаемая величина; при ее формальном вычислении по теории возмущений она является функцией затравочного заряда  $g_0$  и параметра обрезания  $A$ , который приходится вводить для устранения расходимостей. Перенормируемость теории состоит в возможности определения перенормированного заряда  $g$  таким образом, чтобы величина  $F$ , выраженная как функция  $g$ , не содержала расходимостей, т.е. стремилась при  $A \rightarrow \infty$  к конечному пределу:

$$F(g_0, A) = F_R(g). \quad (4.17)$$

Величины, не имеющие непосредственно наблюдаемого смысла (такие, как функция Грина), могут перенормироваться более сложно. Фактически, для всех технических целей достаточно ограничиться категорией величин, которые перенормируются мультипликативно:

$$F(g_0, A; p_i, \dots) = Z(g_0, A) F_R(g; p_i, \dots), \quad (4.18)$$

т.е. из величины  $F$  (зависящей от импульсов  $p_i$  и других переменных), вообще говоря, выделяется расходящийся  $Z$ -фактор. Ввиду независимости  $F_R$  от  $A$ , имеем

$$\frac{dF_R}{d \ln A} = 0. \quad (4.19)$$

Подставляя  $F_R$  из (4.18) и выражая полную производную через частные, получим уравнение Каллана – Симанчика:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln A} + W(g_0) \frac{\partial}{\partial g_0} + V(g_0) \right] F(g_0, A; p_i, \dots) = 0. \quad (4.20)$$

Функции  $W$  и  $V$  при формальном определении зависят от  $\Lambda$ ; фактическое отсутствие такой зависимости удается доказать, воспользовавшись тем, что  $Z$ -факторы для различных величин  $F$  не являются независимыми, а выражаются друг через друга [46]. Поэтому уравнение (4.20) содержит существенно больше, чем (4.19), отражая глубокие функциональные связи, обусловленные перенормируемостью: оно эквивалентно утверждению о существовании точной ренормгруппы в методе Вильсона [9, 10].

В рассматриваемом случае мультипликативной перенормируемостью обладает величина  $\kappa^2 + \Sigma(0, \kappa) - \Sigma(0, 0)$  [38], которая отличается от ряда в (4.11) лишь тривиальным слагаемым; ее подстановка в (4.20) приводит к системе уравнений для коэффициентов  $A_N^K$ , позволяющей определить коэффициенты с  $K > 0$  по заданному  $A_N^0$ . Отсюда ясно, насколько мощным свойством является перенормируемость теории: она радикально сокращает произвол в выборе коэффициентов  $A_N^K$  разложения (4.11). Коэффициенты  $A_N^0$  хорошо воспроизводятся асимптотикой Липатова (см. формулу (4.16)) и могут использоваться как граничное условие к указанной системе уравнений; это позволяет исследовать все  $A_N^K$  с  $N \gg 1$ .

В информации о коэффициентах  $A_N^0$  имеется некоторый "пробел": для небольших  $N$  они вычисляются по теории возмущений, для  $N \gg 1$  — методом Липатова, но для  $N \sim 1$  они, строго говоря, неизвестны, хотя и могут быть определены с точностью в несколько процентов путем интерполяции (см. примеры в [58, 62]). Соответственно, в плоскости  $(N, K)$  возникает область неуниверсальности  $I$  (рис. 7), в которой поведение коэффициентов  $A_N^K$  существенно зависит от конкретных значений  $A_N^0$  с  $N \sim 1$ ; области выше и ниже области  $I$  "управляются" тривиальным коэффициентом  $A_0^0 = 1$  и асимптотикой Липатова для  $A_N^0$ , соответственно. Жирной штриховой линией на рис. 7 показаны перевальные значения  $K$  для  $N = \text{const}$  в предположении  $|g_0| \ll 1$ ,  $g_0 \ln \Lambda/\kappa \sim 1$ ; при уменьшении  $N$  перевал исчезает, и доминирующая роль переходит к паркетным коэффициентам  $A_N^N$ , лежащим на главной диагонали. Существенный вклад в сумму (4.11)

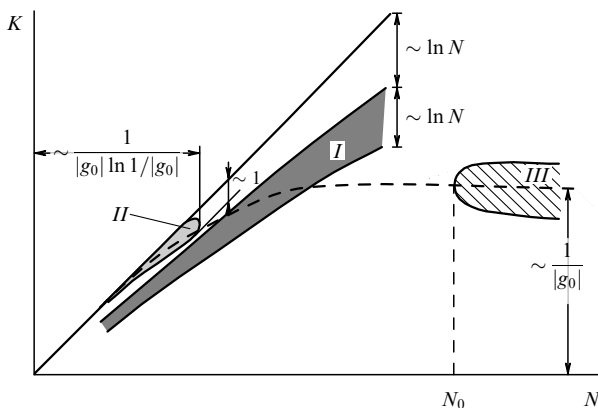


Рис. 7. Области в плоскости  $(N, K)$ , существенные при исследовании суммы (4.11):  $I$  — область неуниверсальности, в которой существенна информация о коэффициентах  $A_N^0$  с  $N \sim 1$ ; жирной штриховой линией показаны перевальные значения  $K$  при  $N = \text{const}$ , при малых  $N$  доминируют паркетные коэффициенты, лежащие на главной диагонали;  $II$  — область, дающая квазипаркетный вклад в сумму (4.11);  $III$  — область, дающая непертурбативный вклад в сумму (4.11) ( $N_0$  может быть выбрано сколь угодно большим).

дают области  $II$  и  $III$ , прилежащие к перевальной линии: область  $II$  дает "квазипаркетный" вклад, который определяется коэффициентами  $A_N^{N-K}$  с  $K \sim 1$  (см. формулу (4.13)) и отличается от паркетного лишь заменой  $g_0$  на модифицированное значение  $g_1$ ; область  $III$  дает непертурбативный вклад, подробно обсуждавшийся выше. Получаемый при этом результат аналогичен (4.14), отличаясь лишь тем, что зависимость от  $\kappa$  непертурбативного вклада  $i\Gamma_0(\kappa)$  оказывается сильной.

Ложный полюс в выражении (3.3) обходится таким образом, что  $g \lesssim 1/\ln \ln(1/g_0)$ , и максимальное значение эффективного взаимодействия оказывается логарифмически малым. Эта малость имеет решающее значение для получения замкнутых результатов. Размеры области  $II$  на рис. 7 указаны для минимального значения полюсного знаменателя в формуле (3.3). Если это минимальное значение гипотетически уменьшать, то область  $II$  расширяется и начинает перекрываться с областью неуниверсальности  $I$ ; для количественного описания последней требуется информация о коэффициентах разложения функции Гелл-Манна–Лоу при  $N \sim 1$ , т.е. именно та информация, которой не хватает для полного восстановления функции Гелл-Манна–Лоу и в которой сконцентрирована вся проблематика сильной связи.

Покажем, что индекс  $\alpha$  в формуле (2.13) может быть определен из условия перенормируемости вклада плато. Вклад последнего в затухание  $\Gamma$ , зависящий от  $\Lambda$  и затравочных значений  $\kappa_0, g_0$ , становится функцией лишь  $\kappa$  и  $g$  при переходе к перенормированным величинам; из соображений размерности имеем  $\Gamma = \kappa^2 f(g)$ , где функция  $f(g)$  определяется в основном экспонентой  $\exp(-1/ag)$  ввиду необходимости согласования с результатом метода оптимальной флуктуации при  $E \rightarrow -\infty$ , когда  $g \approx g_0$ . Учитывая соотношение (3.3), имеем

$$\begin{aligned} \Gamma &\sim \kappa^2 \exp\left(-\frac{1}{ag_0} - \frac{W_2}{a} \ln \frac{\Lambda}{\kappa}\right) \sim \\ &\sim \Lambda^2 \left(\frac{\Lambda^2}{\kappa^2}\right)^{-W_2/2a-1} \exp\left(-\frac{1}{ag_0}\right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

что с учетом  $J \sim \Lambda^2$ ,  $\kappa^2 = |E|$ ,  $a = -3/8\pi^2$  воспроизводит второй член в формуле (2.14)<sup>7</sup>; указанное значение  $a$  получается методом работы [20] с использованием известного инстантонного решения при  $d = 4$  [58].

#### 4.4. Переход к $(4-\epsilon)$ -мерной теории

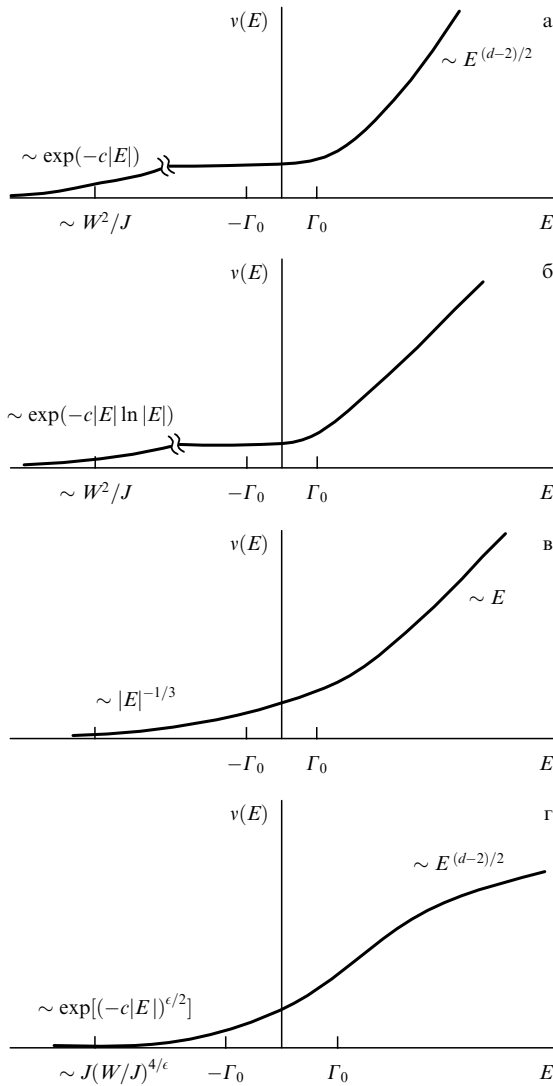
При  $d = 4 - \epsilon$  для собственной энергии справедливо разложение, аналогичное (4.11), с заменой

$$\ln\left(\frac{\Lambda}{\kappa}\right) \rightarrow \frac{(\Lambda/\kappa)^\epsilon - 1}{\epsilon}. \quad (4.22)$$

Коэффициенты  $A_N^K$  становятся функциями  $\epsilon$  и вычисляются в полной аналогии с четырехмерным случаем, т.е. из условия перенормируемости теории с использованием асимптотики Липатова в качестве граничных условий. Систематическое изложение структуры теории дается в разделе 6.

Качественное поведение плотности состояний  $\nu(E)$  для четырех рассмотренных типов моделей представлено на рис. 8.

<sup>7</sup> В результаты типа (2.14) входит перенормированная энергия  $E$  [43].



**Рис. 8.** Плотность состояний  $v(E)$  для четырех типов моделей:  $d > 4$  (а);  $d = 4$ , решеточные модели (б);  $d = 4$ , перенормируемые модели (в);  $d = 4 - \epsilon$  (г). Масштаб  $\Gamma_0$  экспоненциально мал по параметру  $1/g_0$  (а, б, в) или по параметру  $1/\epsilon$  (г).

### 5. Высшие порядки теории возмущений

Настоящий раздел имеет целью проиллюстрировать ситуацию, на наш взгляд, плохо осознанную научной общественностью: *в высших порядках можно вычислить все.*

#### 5.1. Статистический метод

Для стандартных моделей типа  $\varphi^4$  ряд теории возмущений расходится факториально, что связано с факториально большим числом диаграмм одинакового порядка. Большое число диаграмм позволяет надеяться на применение статистических методов, так как действие закона больших чисел должно приводить к формированию простых предельных распределений, характеризуемых небольшим числом параметров. Такая программа была реализована в работе [36] на примере диаграммного ряда для собственной энергии.

Учитывая, что диаграмма  $(N + 1)$ -го порядка может быть получена из диаграммы  $N$ -го порядка путем

"навешивания" дополнительного примесного пунктира, связь диаграмм  $(N + 1)$ -го и  $N$ -го порядков можно записать в виде рекуррентного соотношения

$$\begin{vmatrix} \Sigma'_{N+1} \\ \Sigma''_{N+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_N & B_N \\ C_N & D_N \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Sigma'_N \\ \Sigma''_N \end{vmatrix}, \quad (5.1)$$

где  $\Sigma'_N$  и  $\Sigma''_N$  — действительная и мнимая часть некоторой диаграммы  $N$ -го порядка, и, оценивая порядок величины коэффициентов  $A_N, B_N, C_N, D_N$ , выделить из них размерные параметры. Далее навешиваемые пунктиры разбиваются на "классы", так что каждый класс характеризуется значениями коэффициентов  $A_N, B_N, C_N, D_N$ , лежащими в некотором малом интервале. Диаграммы, получаемые из первой диаграммы на рис. 1б путем последовательного навешивания пунктиров одного и того же класса, составляют при  $N \rightarrow \infty$  бесконечно малую долю от их общего числа. В типичной диаграмме  $N$ -го порядка класс пунктира на каждом шаге выбирается случайным образом. Это позволяет перейти к статистическому описанию и рассматривать  $A_N, B_N, C_N, D_N$  как случайные величины.

Исследуя уравнение (5.1) со случайными параметрами, можно показать, что вклад отдельной диаграммы  $N$ -го порядка является сильно флуктуирующей величиной, но полный вклад  $N$ -го порядка оказывается самоусредняющимся; в результате находится общий член ряда для больших  $N$  и воспроизводится функциональная форма флуктуационного хвоста плотности состояний, которую ранее удавалось получить лишь инстантонным методом. Таким образом, статистический метод работы [36] демонстрирует принципиальную возможность воспроизведения инстантонных результатов с помощью диаграммной техники, что подвергалось сомнению даже в серьезных работах.

#### 5.2. Метод Липатова

Каноническим методом вычисления далеких членов ряда теории возмущений является метод Липатова [58], идея которого изложена в разделе 4.1. Он позволяет получить далекие коэффициенты разложения по константе связи  $g$  практически для любого функционального интеграла. Если точное вычисление функционального интеграла, как правило, невозможно, то для вычисления его далеких коэффициентов достаточно перевального приближения, которое всегда может быть реализовано.

Для рассматриваемой задачи представляют интерес интегралы

$$\begin{aligned} Z_M(\alpha_1, x_1, \dots, \alpha_M, x_M) &= \\ &= \int \mathcal{D}\varphi \varphi_{x_1}(x_1) \dots \varphi_{x_M}(x_M) \exp(-H\{g, \varphi\}), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned} H\{g, \varphi\} &= \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \sum_x [\nabla \varphi_x(x)]^2 + \frac{1}{2} \kappa^2 \sum_x \varphi_x(x)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} g \left[ \sum_x \varphi_x(x)^2 \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Следуя общей схеме метода Липатова (см. раздел 4.1) и взяв в качестве  $F(g)$  в формуле (4.5) величину  $Z_M$ ,

получим

$$[Z_M]_{N-1} = \int \frac{dg}{2\pi i} \int D\varphi \varphi_{x_1}(x_1) \dots \varphi_{x_M}(x_M) \times \exp(-H\{g, \varphi\} - N \ln g). \quad (5.4)$$

Перевальная точка определяется условиями:

$$\left( \frac{\partial}{\partial g} \right) (-N \ln g - H\{g, \varphi\}) = 0. \quad (5.5)$$

Если искать классическое решение (инстантон) в виде  $\varphi_x^c(x) = \varphi_c(x)u_x$ , где  $u_x$  — компоненты единичного вектора  $\mathbf{u}$ , то уравнение (5.5) дает

$$Ng_c^{-1} = -\frac{1}{4} \int d^d x \varphi_c(x)^4, \quad (5.6)$$

$$-\Delta \varphi_c(x) + \kappa^2 \varphi_c(x) + g_c \varphi_c(x)^3 = 0, \quad (5.7)$$

откуда ясно, что  $g_c < 0$ , а  $\varphi_c(x)$  для обеспечения сходимости интеграла в выражении (5.6) ищется в классе функций, убывающих на бесконечности.

Рассматривая малые отклонения от перевальной точки

$$g = g_c + \delta g, \quad \varphi_x(x) = \varphi_c(x)u_x + \delta \varphi_x(x), \quad (5.8)$$

нетрудно убедиться в справедливости оценок

$$g_c \sim N^{-1}, \quad \delta g \sim N^{-3/2}, \quad \varphi_c \sim N^{1/2}, \quad \delta \varphi \sim 1, \quad (5.9)$$

из которых ясна применимость метода перевала при больших  $N$ .

### 5.3. Алгебра факториальных рядов

Вообще говоря, недостаточно знать коэффициенты разложения функциональных интегралов, так как с последними обычно нужно произвести какие-то действия: найти  $M$ -точечную функцию Грина, определяемую отношением двух интегралов

$$G_M(\alpha_1, x_1, \dots, \alpha_M, x_M) = Z_0^{-1} Z_M(\alpha_1, x_1, \dots, \alpha_M, x_M), \quad (5.10)$$

перейти к собственной энергии или вершинной части, вычислить свободную энергию как логарифм статистического интеграла и т.д. Если, однако, интересоваться лишь далекими коэффициентами разложения, то для факториальных рядов существует простая алгебра, позволяющая работать с ними так же просто, как с конечными выражениями.

Пусть

$$S_A = A_0 + A_1 g + \dots + A_N g^N + \dots, \\ S_B = B_0 + B_1 g + \dots + B_N g^N + \dots \quad (5.11)$$

— два факториальных ряда, так что  $A_N, B_N \sim N!$ . Непосредственное перемножение рядов дает

$$S_A S_B = A_0 B_0 + \dots + g^N (A_0 B_N + A_1 B_{N-1} + A_2 B_{N-2} + \dots + A_N B_0) + \dots \quad (5.12)$$

Ввиду факториальности рядов имеем  $B_{N-1} \sim B_N/N$ ,  $B_{N-2} \sim B_N/N^2 \dots$  и, аналогично,  $A_{N-1} \sim A_N/N$ ,  $A_{N-2} \sim A_N/N^2 \dots$ ; поэтому в скобках в формуле (5.12) можно оставить только первый и последний члены,

$$S_A S_B = A_0 B_0 + \dots + g^N (A_0 B_N + A_N B_0) + \dots, \quad (5.13)$$

если коэффициенты  $A_N$  и  $B_N$  имеют одинаковую скорость роста. Если коэффициенты одного из рядов, например  $S_A$ , растут быстрее (за счет более медленных поправок к основной факториальной зависимости), то в скобках в формуле (5.13) сохраняется только второй член, и произведение  $S_A S_B$  можно записать как  $B_0 S_A$ , если учитывать лишь нулевой и далекие члены разложения.

Используя формулу (5.13) для  $n$ -кратного умножения ряда  $S_A$  самого на себя, получим формулу для возведения  $S_A$  в натуральную степень:

$$(S_A)^n = A_0^n + \dots + n A_0^{n-1} A_N g^N + \dots \quad (5.14)$$

Пользуясь этой формулой, нетрудно получить результат для любой регулярной функции  $f(x)$

$$f(S_A) = f(A_0) + \dots + g^N f'(A_0) A_N + \dots \quad (5.15)$$

и обобщить результат (5.14) на отрицательные и дробные степени.

### 5.4. Проблемы, которые нужно решать

В принципе, идея вычислений методом Липатова достаточно проста, так как в результате разложения вблизи перевальной точки возникает гауссов интеграл, который всегда вычисляется:

$$\int dt_1 \int dt_2 \dots \int dt_N \exp\left(-\sum_{i,j=1}^N A_{i,j} t_i t_j\right) = \frac{(2\pi)^{N/2}}{(\det A)^{1/2}}. \quad (5.16)$$

Тем не менее, на практике вычисления оказываются достаточно громоздкими ввиду необходимости решения ряда технических проблем. Не останавливаясь на деталях вычислений, которые достаточно подробно изложены в [37–39], обсудим основные проблемы, которые приходится решать.

**5.4.1. Существование инстантов.** Вопрос о существовании инстантов оказывается нетривиальным [44]: решения уравнения (5.7) существуют при  $d < 4$  для  $\kappa^2 > 0$ , но отсутствуют при  $d > 4$ ; при  $d = 4$  уравнение разрешимо при  $\kappa = 0$ , но неразрешимо при  $\kappa$ , отличных от нуля. Физический смысл этой странной ситуации выясняется с помощью оценок методом оптимальной флуктуации<sup>8</sup> (см. раздел 2). При  $d > 4$  и при  $d = 4$ ,  $E < 0$  минимум функции  $S(E, R)$  в формуле (2.8) достигается на границе области определения, и ее производная по  $R$  не обращается в нуль; соответственно, не обращается в нуль вариация  $H\{g, \varphi\}$  по  $\varphi$ , приводящая к уравнению (5.7). Эта проблема по-разному решается для  $d > 4$  и  $d = 4$ .

При  $d > 4$  теория неперенормируема, и континуальная модель логически незамкнута — ее следует доопре-

<sup>8</sup> Метод оптимальной флуктуации соответствует репличному пределу  $n = 0$ ; при  $n \neq 0$  аналогичные результаты можно получить, характеризуя инстантон двумя параметрами — амплитудой и радиусом и производя вариационную оценку действия.

делить на малых расстояниях. Это можно сделать путем перехода к решеточной модели (тогда  $-\Delta = \hat{p}^2$  в формуле (5.7) заменяется на  $\epsilon(\hat{p})$ ) или с помощью введения конечного корреляционного радиуса случайного потенциала, в результате чего член порядка  $\varphi^4$  в (5.3) принимает вид

$$\frac{1}{4} g \sum_x \int d^d x \int d^d y \varphi_x(x)^2 B(x-y) \varphi_x(y)^2. \quad (5.17)$$

В результате таких модификаций инстантоны появляются и оказываются локализованными на соответствующем минимальном масштабе расстояний. Таким же образом нужно поступать при рассмотрении перенормируемого класса моделей при  $d = 4$ .

В четырехмерных перенормируемых моделях проблема может быть решена без указанных модификаций; идея состоит в минимизации  $H\{g, \varphi\}$  при фиксированном радиусе инстантона  $R$  и последующем интегрировании по  $R$ , которое имеет существенно негауссовский характер. Такая же процедура используется при  $d = 4 - \epsilon$ : в этом случае инстантон формально существует, но направление, соответствующее изменению радиуса инстантона, оказывается "мягким", и перевального приближения оказывается недостаточно<sup>9</sup>.

Определим "центр"  $x_0$  функции  $\varphi(x)$  и ее "радиус"  $R$  условиями<sup>10</sup>

$$\int d^d x |\varphi(x)|^4 (x - x_0)_\mu = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, d, \quad (5.18)$$

$$\int d^d x |\varphi(x)|^4 \ln \frac{(x - x_0)^2}{R^2} = 0 \quad (5.19)$$

и введем под интеграл (5.4) разложение единицы

$$1 = \int d^d x |\varphi(x)|^4 \int_0^\infty d \ln R^2 \delta \left[ - \int d^d x |\varphi(x)|^4 \ln \left( \frac{x - x_0}{R} \right)^2 \right]. \quad (5.20)$$

Изменим порядок интегрирования по  $R$  и  $\varphi$ ; тогда  $\delta$ -функция в разложении (5.20) ограничивает интегрирование по  $\varphi$  условием (5.19), т.е. условием постоянства ее радиуса  $R$ , а интегрирование по  $R$  производится в явном виде.

Если разложение (5.8) производится вблизи произвольной функции  $\varphi_c(x)$ , то в экспоненте (5.4) возникают линейные по  $\delta\varphi$  члены — они обращаются в нуль лишь для "правильного" инстантона, удовлетворяющего уравнению (5.7). В интересующем же нас случае "правильных" инстантонов не существует ввиду неразрешимости уравнения (5.7). Выберем функцию  $\varphi_c(x)$  из условия минимума  $H\{g_c, \varphi\}$  при дополнительном условии (5.19), фиксирующем радиус инстантона; после замены переменных это приводит к уравнению

$$-\Delta \varphi_c(x) + \kappa_R^2 \varphi_c(x) + g_c \varphi_c(x)^3 + \mu \varphi_c(x)^3 \ln x^2 = 0, \quad (5.21)$$

<sup>9</sup> Точнее, перевальное приближение применимо при  $N\epsilon \gg 1$ , тогда как вычисления производятся при более слабом условии  $N \gg 1$ .

<sup>10</sup> Разумеется, результат не должен зависеть от способа определения  $x_0$  и  $R$ . Можно убедиться, что при замене в выражениях (5.18) и (5.19)  $|\varphi(x)|^4$  на  $|\varphi(x)|^2$  параметр  $\alpha$  выпадает из ответа; мы не исследовали этот вопрос более подробно. Аналогичные замечания применимы в отношении формулы (5.30).

где  $\kappa_R = \kappa R$ ,  $\mu$  — множитель Лагранжа [57]. Такой выбор инстантона обладает "чудесным" свойством: в аргументе  $\delta$ -функции (5.20) возникает комбинация, в точности соответствующая линейным по  $\delta\varphi$  членам в экспоненте (5.4), в результате чего эти члены полностью исключаются.

**5.4.2. Нулевые и мягкие моды.** Если матрица  $A$  в (5.16) имеет нулевое собственное значение  $\lambda_0$ , то интеграл (5.16) расходится. Эта расходимость в действительности фиктивна, что легко понять, если сначала считать собственное значение  $\lambda_0$  конечным, а затем уменьшать его величину. При таком предельном переходе возникает "мягкое" направление, вдоль которого флуктуации неограниченно возрастают. Расходимость интеграла (5.16) означает лишь неприменимость гауссова приближения и необходимость точного интегрирования в указанном направлении.

Фактически, нулевые моды возникают во всех представляющих интерес ситуациях, и их существование можно предвидеть заранее. Разделяя  $\delta\varphi_x(x)$  в (5.8) на продольную и поперечную части

$$\delta\varphi_x(x) = \delta\varphi_L(x)u_x + \delta\varphi_T^T(x), \quad \delta\varphi^T \perp \mathbf{u}, \quad (5.22)$$

легко убедиться, что в экспоненте (5.4) возникает выражение

$$N \left( \frac{\delta g}{g_c} \right)^2 - 2\delta g \int d^d x \varphi_c(x)^3 \delta\varphi_L(x) - \int d^d x \delta\varphi_L(x) \hat{M}_L \delta\varphi_L(x) - \sum_x \int d^d x \delta\varphi_x^T(x) \hat{M}_T \delta\varphi_x^T(x), \quad (5.23)$$

где введены операторы  $\hat{M}_L$  и  $\hat{M}_T$ , играющие большую роль в инстантонных вычислениях [20]:

$$\hat{M}_L = -\Delta + \kappa^2 - 3\phi_c(x)^2, \quad \hat{M}_T = -\Delta + \kappa^2 - \phi_c(x)^2, \quad (5.24)$$

и проведена замена переменных

$$\varphi_c(x) = (-g_c)^{-1/2} \phi_c(x), \quad (5.25)$$

исключающая  $g_c$  из (5.7).

В обычной ситуации, когда существуют "истинные" инстантоны, удовлетворяющие уравнению (5.7), можно продемонстрировать наличие нулевых трансляционных и вращательных мод [20]. Действительно, если  $\varphi_c(x)$  — решение уравнения (5.7), то  $\varphi_c(x - x_0)$  также является решением; переходя к пределу малых  $x_0$ , легко показать, что оператор  $\hat{M}_L$  имеет  $d$  нулевых мод

$$e_\mu^L(x) = \text{const} \times \frac{\partial \phi_c(x)}{\partial x_\mu}, \quad \mu = 1, 2, \dots, d. \quad (5.26)$$

Аналогично, если  $\varphi_x^c(x) = \varphi_c(x)u_x$  является инстантоном, то  $\varphi_c(x)u_x'$  — также инстантон. Вследствие этого оператор  $\hat{M}_T$  имеет нулевую моду

$$e_0^T(x) = \text{const} \times \phi_c(x), \quad (5.27)$$

что ясно непосредственно из (5.7).

В "безмассовой" четырехмерной теории ( $d = 4, \kappa = 0$ ) уравнение (5.7) после замены (5.25) имеет решение (см. [58])

$$\phi_c(x) = \frac{2\sqrt{2}R}{x^2 + R^2}, \quad (5.28)$$

где параметр  $R$  (радиус инстантона) является произвольным в соответствии с наличием плато в методе оптимальной флуктуации (рис. 4б); произвольность параметра  $R$  приводит к наличию у  $\hat{M}_L$  еще одной нулевой моды — дилатационной [58, 61]:

$$e_0^L(x) = \text{const} \times \frac{\partial \phi_c(x)}{\partial R}. \quad (5.29)$$

Фактически ее существование и приводит к неразрешимости четырехмерного уравнения (5.7) для конечных  $\kappa$ : учет  $\kappa^2$  по теории возмущений приводит к уравнению  $\hat{M}_L \delta\varphi = -\kappa^2 \phi_c(x)$ , правая часть которого неортогональна  $e_0^L(x)$ .

В "массивной" четырехмерной теории ( $d = 4, \kappa^2 > 0$ ) и при  $d = 4 - \epsilon$ , когда инстантон определяется уравнением (5.21), все перечисленные моды перестают быть нулевыми, но остаются мягкими, так как множитель Лагранжа  $\mu$  содержит малый параметр [38, 39]. Выделение трансляционных и вращательных мод производится в полной аналогии с проведенным выше выделением интегрирования по радиусу инстантона (соответствующего дилатационной моде). Наряду с "центром" и "радиусом" функции  $\varphi(x)$  определим ее "ориентацию"  $\mathbf{v}$  как единичный вектор, фиксированный условием

$$\mathbf{v}\{\varphi\} \parallel \int d^d x |\varphi(x)|^3 \varphi(x). \quad (5.30)$$

Наряду с выражением (5.20) введем под интеграл (5.4) два разложения единицы:

$$1 = \left( \int d^d x |\varphi(x)|^4 \right)^d \int d^d x_0 \prod_{\mu=1}^d \delta \left( - \int d^d x |\varphi(x)|^4 (x - x_0)_\mu \right), \quad (5.31)$$

$$1 = \int d^n u \delta(\mathbf{u} - \mathbf{v}\{\varphi\}), \quad (5.32)$$

и вынесем интегрирование по  $x_0$  и  $\mathbf{u}$  из-под интегрирования по  $\varphi$ ; тогда функциональное интегрирование производится при фиксированном центре и ориентации инстантона и может быть выполнено в перевальном приближении.

**5.4.3. Практическое вычисление детерминантов.** После проведения интегрирования по  $\varphi$  выражение (5.4) будет содержать детерминанты операторов  $\hat{M}_L$  и  $\hat{M}_T$  с исключенными вкладами нулевых мод. Спектр этих операторов содержит непрерывную компоненту, и для вычисления детерминантов требуется проводить квантование в большом, но конечном объеме с последующим переходом к термодинамическому пределу. Однако аналитическое вычисление собственных значений  $\hat{M}_L$  и  $\hat{M}_T$ , как правило, невозможно, а численные методы в такой ситуации неэффективны. Метод преодоления этих трудностей предложен Брезаном и Паризи [62]. Введя обозначения

$$D(z) = \det \hat{R}(z), \quad \hat{R}(z) = 1 - \frac{3z\phi_c(x)^2}{\hat{p}^2 + \kappa^2} \quad (5.33)$$

и воспользовавшись тем, что детерминант произведения равен произведению детерминантов, имеем

$$\begin{aligned} \det \hat{M}_L &= D(1) \det \{\hat{p}^2 + \kappa^2\}, \\ \det \hat{M}_T &= D\left(\frac{1}{3}\right) \det \{\hat{p}^2 + \kappa^2\}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Детерминант оператора  $\hat{p}^2 + \kappa^2$  определяется функциональным интегралом для задачи без взаимодействия и вычисляется тривиально. Смысл этих преобразований состоит в том, что спектр оператора  $\hat{R}(z)$  является чисто дискретным: его низшие собственные значения могут быть найдены численно, а для высших существует простая асимптотика (см. формулу (5.39)). Нетрудно показать, что

$$D(z) = \prod_s \left( 1 - \frac{z}{\mu_s} \right), \quad (5.35)$$

где  $\mu_s$  — собственные значения уравнения

$$[\hat{p}^2 + \kappa^2 - 3\mu_s \phi_c(x)^2] e_s(x) = 0. \quad (5.36)$$

В силу (5.35),  $\det \hat{M}_L$  и  $\det \hat{M}_T$  выражаются через одну последовательность  $\mu_s$ .

Для исключения из детерминантов вклада нулевых (или мягких) мод нужно найти закон стремления к нулю соответствующих собственных значений  $\lambda_s(z)$  оператора  $-\Delta + \kappa^2 - 3z\phi_c(x)^2$  при  $z \rightarrow 1$  или  $z \rightarrow 1/3$ . Вычисление по теории возмущений дает для собственных значений, соответствующих трансляционным, вращательной и (при  $d = 4$ ) дилатационной модам

$$\begin{aligned} \lambda_\mu(z) &= I_6 \left[ 4 \int d^d x \left( \frac{\partial \phi_c(x)}{\partial x_\mu} \right)^2 \right]^{-1} (z - 1), \quad z \rightarrow 1, \\ \lambda_0(z) &= \frac{I_4}{I_2} (1 - 3z), \quad z \rightarrow \frac{1}{3}, \\ \lambda_0(z) &= 3J \left[ \int d^4 x \left( \frac{\partial \phi_c(x)}{\partial R} \right)^2 \right]^{-1} (z - 1), \quad z \rightarrow 1, \end{aligned} \quad (5.37)$$

где введены обозначения для интегралов от инстантонного решения

$$I_p = \int d^d x \phi_c(x)^p, \quad J = \int d^4 x \phi_c(x)^2 \left( \frac{\partial \phi_c(x)}{\partial R} \right)^2 \Big|_{R=1}. \quad (5.38)$$

**5.4.4. Расходимости детерминантов.** Метод Брезана и Паризи выявляет расходимости в детерминантах, устранение которых обнаруживает связь с общими проблемами перенормируемости. Найдем асимптотику  $\mu_s$  при больших  $s$ , подсчитывая число электронов, имеющих энергию меньше  $-\kappa^2$  в квазиклассическом (при больших  $\mu$ ) потенциале  $-3\mu\phi_c(x)^2$ , что можно сделать методом Томаса – Ферми [62]. Результат имеет вид

$$\mu_s \sim s^v, \quad (5.39)$$

где  $v = (2d - 4)/d$  в решеточных моделях для  $d \geq 4$  [37] и  $v = 2/d$  в континуальных моделях для  $d \leq 4$  [39]. Пред-



ставляя (5.35) в виде

$$D(z) = \exp\left(-z \sum_s \mu_s^{-1} - \frac{1}{2} z^2 \sum_s \mu_s^{-2} - \frac{1}{3} z^3 \sum_s \mu_s^{-3} - \dots\right), \quad (5.40)$$

видим, что при  $d > 4$  последовательность  $\mu_s$  растет быстрее, чем  $s^{1+\delta}$ , и расходимости в  $D(z)$  отсутствуют; при  $d < 4$  и в решеточных моделях при  $d = 4$  в (5.40) расходится первая сумма; наконец, в континуальной модели при  $d = 4$  расходятся две первые суммы. Эти расходимости могут быть выделены в явном виде с помощью правил сумм, получаемых путем вычисления  $\ln D(z)$  при малых  $z$  по теории возмущений на основе определения (5.33) [38, 39, 62]:

$$\begin{aligned} \sum_s \frac{1}{\mu_s} &= 3I_2 \int_0^A \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 + \kappa^2}, \\ \sum_s \frac{1}{\mu_s^2} &= 9 \int_0^A \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int_0^A \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\langle \phi_c^2 \rangle_q \langle \phi_c^2 \rangle_{-q}}{(p^2 + \kappa^2)[(p+q)^2 + \kappa^2]}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

где обозначение  $\langle f \rangle_q$  принято для фурье-компоненты функции  $f(x)$ . При  $d = 4 - \epsilon$  вторая сумма принимает вид:

$$\sum_s \frac{1}{\mu_s^2} \approx 9K_d I_4 \frac{1 - A^{-\epsilon}}{\epsilon} + 12\left(\frac{1}{3} + C - \ln 2\right). \quad (5.42)$$

Расходимость первой суммы устраняется в результате перенормировки величины  $\kappa$ . Если ее затравочное значение равно  $\kappa_0$ , то исходный гамильтониан можно представить в виде суммы гамильтониана (5.3) с перенормированной  $\kappa$  и контрчлена

$$\Delta H\{\varphi\} = \frac{1}{2} \sum_x (\kappa_0^2 - \kappa^2) \sum_\alpha \varphi_\alpha(x)^2, \quad (5.43)$$

где перенормировка  $\kappa$  ищется в виде диаграммного разложения

$$\kappa_0^2 - \kappa^2 = C_1 g + C_2 g^2 + \dots \quad (5.44)$$

Строя инстантон по гамильтониану (5.3) и используя оценки (5.9) для значений в перевальной точке и среднеквадратичных флуктуаций вблизи нее, убеждаемся, что при вычислениях с точностью до нулевого порядка по  $N$  включительно в выражении (5.44) нужно учитывать лишь первый член разложения, а для  $g$  и  $\varphi_\alpha(x)$  в формуле (5.43) подставлять их значения в перевальной точке. Вычисляя  $\kappa_0^2 - \kappa^2$  в однопетлевом приближении (определяющем  $C_1$  в разложении (5.44)), получим, что контрчлен (5.43) приводит к появлению дополнительного множителя

$$\exp\left(\frac{1}{2} g_c(n+2) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 + \kappa^2} I_2\right), \quad (5.45)$$

который в точности сокращает расходящуюся часть детерминантов. Расходимость второй суммы в формуле (5.41) при  $d = 4$  может быть устранена перенормировкой заряда<sup>11</sup>, однако нас интересует разложение типа (4.11),

содержащее затравочный заряд  $g_0$  и логарифмические расходимости в явном виде. Окончательный результат выражается в терминах перенормированных детерминантов, которые определяются как

$$D_R(z) = \prod_s \left(1 - \frac{z}{\mu_s}\right) \exp\left(\frac{z}{\mu_s}\right) \quad (5.46)$$

или

$$D_R(z) = \prod_s \left(1 - \frac{z}{\mu_s}\right) \exp\left(\frac{z}{\mu_s} + \frac{z^2}{2\mu_s^2}\right). \quad (5.47)$$

Последнее выражение используется в континуальной модели при  $d = 4$ ; через него же удобно выражать результаты для  $d = 4 - \epsilon$ . Значения произведения (5.46) или (5.47) при  $z = 1$  и  $z = 1/3$  с исключенными нулевыми множителями, соответствующими вкладом нулевых мод, обозначаем как  $\bar{D}_R(1)$  и  $\bar{D}_R(1/3)$ .

### 5.5. Обзор инстантонных результатов

Метод Липатова позволяет получить результаты для коэффициентов разложения произвольных  $M$ -точечных функций Грина [37–39, 61, 62] при произвольном числе  $n$  компонент поля  $\varphi$ , от которых можно перейти к собственной энергии и вершинным частям, а затем — к величинам, представляющим непосредственный физический интерес: функции Гелл-Манна–Лоу [58], другим скейлинговым функциям [61, 62], плотности состояний в области флуктуационного хвоста [37–39, 43] и т.д.

Для нас представляют интерес результаты для собственной энергии неупорядоченной системы ( $n = 0$ ). В решеточных моделях при  $d \geq 4$  имеем [37]:

$$\begin{aligned} [\Sigma(p, \kappa)]_N &= \frac{\langle \phi_c^3 \rangle_p \langle \phi_c^3 \rangle_{-p}}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{\bar{D}_R(1/3)}{|\bar{D}_R(1)|}\right)^{1/2} \times \\ &\times \frac{2}{I_4(\kappa^2)} \Gamma\left(N + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{4}{I_4(\kappa^2)}\right)^N, \end{aligned} \quad (5.48)$$

где

$$I_4(\kappa^2) = I_4(0) + 2I_2(0)\kappa^2, \quad d > 4, \quad (5.49)$$

$$I_4(\kappa^2) = I_4(0) + 2I_3(0)^2 K_4 \kappa^2 \ln \frac{A}{\kappa} + O(\kappa^2), \quad d = 4. \quad (5.50)$$

Здесь решеточный инстантон определяется уравнением (5.7) с  $-\Delta = \hat{p}^2 \rightarrow \epsilon(\hat{p})$ , а величины  $I_p(\kappa^2)$  определяются уравнением (5.38) с заменой интеграла по  $d^d x$  на сумму по узлам решетки. Трансляционные моды в решеточных моделях являются щелевыми, и их выделения из  $D_R(1)$  не требуется.

В континуальной модели для  $d = 4 - \epsilon$  ( $0 \leq \epsilon \leq 1$ ) имеем [38, 39]:

$$\begin{aligned} [\Sigma(p, \kappa)]_N &= c_2 \Gamma(N+b) a^N \int_0^\infty d \ln R^2 R^{-2} \langle \phi_c^3 \rangle_{Rp} \langle \phi_c^3 \rangle_{-Rp} \times \\ &\times \exp\left[-Nf(\kappa R) + N\epsilon \ln R + 2K_d I_4(\kappa R) \frac{1 - (AR)^{-\epsilon}}{\epsilon}\right], \end{aligned} \quad (5.51)$$

<sup>11</sup> Это можно сделать аналогично предыдущему, используя наиболее общий вид контрчленов (см. формулы (3.26)–(3.28) в работе [46]).

где

$$\begin{aligned} a &= -3K_4, \quad b = \frac{d+2}{2}, \quad c_2 = c(3K_4)^{7/2}, \\ I_4(x) &= I_4 \exp[f(x)], \\ f(x) &= -\frac{\epsilon}{2}(C+2+\ln \pi) - 3x^2 \left( C + \frac{1}{2} + \ln \frac{x}{2} \right), \\ \langle \phi_c \rangle_p^3 &= 8 \times 2^{1/2} \pi^2 p K_1(p), \end{aligned} \quad (5.52)$$

$C$  — постоянная Эйлера,  $K_1(x)$  — функция Макдональда, а константа  $c$  определяется как

$$\begin{aligned} c &= \frac{2^{n-2} 3^{1/2}}{(2\pi)^{3+n/2}} \left( \frac{I_6}{4} \right)^2 J^{1/2} \exp \left[ -\frac{3(n+4)}{4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n+8}{3} \left( -\ln 2 + C + \frac{1}{3} \right) \right] \left[ -\bar{D}_R(1) \bar{D}_R^{n-1} \left( \frac{1}{3} \right) \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Здесь интегралы  $I_p$  соответствуют четырехмерной безмассовой теории и определяются по инстантону (5.28) с  $R=1$ :

$$\begin{aligned} I_3 &= 4\sqrt{2} S_4, \quad I_4 = \frac{16}{3} S_4, \quad I_6 = \frac{64}{5} S_4, \\ J &= \frac{16}{15} S_4; \quad S_4 = 2\pi^2. \end{aligned} \quad (5.54)$$

В данном случае собственные значения  $\mu_s$  уравнения (5.36) могут быть найдены точно; они равны  $s(s+1)/6$  с кратностью вырождения  $s(s+1)(2s+1)/6$  ( $s=1, 2, \dots$ ). Это позволяет получить численные значения для детерминантов  $\bar{D}_R(1)$  и  $\bar{D}_R(1/3)$ :

$$-\bar{D}_R(1) \approx 578, \quad \bar{D}_R\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,872. \quad (5.55)$$

Результат для  $[\Sigma(p, \kappa)]_N$  может быть получен также при  $d < 4$  без предположения о малости  $\epsilon$ ; при этом дилатационная мода рассматривается на общих основаниях и ее специального выделения не требуется:

$$\begin{aligned} [\Sigma(p, \kappa)]_N &= \frac{1}{2(2\pi)^{(d+1)/2}} \left( \frac{I_6 - I_4}{I_4 d} \right)^{d/2} \left( \frac{4}{I_4} \right)^{(d+2)/2} \times \\ &\quad \times \left| \frac{\bar{D}_R(1/3)}{\bar{D}_R(1)} \right|^{1/2} \Gamma \left( N + \frac{d+1}{2} \right) \times \\ &\quad \times \left( -\frac{4}{I_4} \kappa^{d-4} \right)^N \kappa^2 \langle \phi_c^3 \rangle_{p/\kappa} \langle \phi_c^3 \rangle_{-p/\kappa}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Здесь инстантон определен уравнением (5.7) с  $\kappa=1$  и взят предел  $L \rightarrow \infty$ . При  $d=4-\epsilon$  результаты (5.56) и (5.51) имеют существенно различную область применимости: при выводе формулы (5.51) перевальное приближение использовалось лишь для интегрирования по "жестким" переменным, и она применима при  $N \gg 1$ ; при выводе выражения (5.56) метод перевала использовался и для интегрирования по мягкой дилатационной моде, что оправдано только при  $N\epsilon \gg 1$ . Можно убедиться, что при последнем условии результаты (5.56) и (5.51) совпадают [39].

В традиционном варианте инстантонного метода удается получить плотность состояний неупорядоченной системы лишь в области флуктуационного хвоста,

когда она определяется суммой далеких членов ряда для функции Грина:

$$v_l(E) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{N=N_0}^{\infty} [G(x, x)]_N (g_0 - i0)^N, \quad N_0 \gg 1. \quad (5.57)$$

Для  $d < 4$  имеем результат

$$\begin{aligned} v(E) &= \frac{(4-d)2^{d-1}}{(2\pi)^{(d+1)/2}} \left( \frac{I_6 - I_4}{I_4 d} \right)^{d/2} \left| \frac{\bar{D}_R(1/3)}{\bar{D}_R(1)} \right|^{1/2} \times \\ &\quad \times |E|^{(d-2)/2} \left( \frac{I_4 |E|^{(4-d)/2}}{2a_0^d W^2} \right)^{(d+1)/2} \exp \left( -\frac{I_4 |E|^{(4-d)/2}}{2a_0^d W^2} \right), \end{aligned} \quad (5.58)$$

энергетическая зависимость которого совпадает с полученной Карди [41]. Нормировка на невозмущенную плотность состояний  $v_0(E)$  и переход от перенормированной энергии  $E$  к затравочной  $E_B$  со сдвинутым началом отсчета (см. формулу (12) в [43]) дают результаты Брезана и Паризи [43]:

$$\begin{aligned} \frac{v(E_B)}{v_0(-E_B)} &= \left( \frac{I_6 - I_4}{3} \right)^{3/2} \left| I_4 \frac{\bar{D}_R(1/3)}{\bar{D}_R(1)} \right|^{1/2} \times \\ &\quad \times \frac{|E_B|}{(a_0^d W^2)^2} \exp \left( -\frac{I_4}{16\pi} - \frac{I_4 |E_B|^{1/2}}{2a_0^d W^2} \right), \quad d=3, \\ \frac{v(E_B)}{v_0(-E_B)} &= \frac{I_6 - I_4}{8\pi^2} \left| I_4 \frac{\bar{D}_R(1/3)}{\bar{D}_R(1)} \right|^{1/2} \left( \frac{4\pi |E_B|}{a_0^d W^2} \right)^{3/2 - I_4/8\pi} \times \\ &\quad \times \exp \left( -\frac{I_4}{8\pi} - \frac{I_4 |E_B|}{2a_0^d W^2} \right), \quad d=2, \end{aligned} \quad (5.59)$$

где численные значения параметров равны<sup>12</sup> [62]:

$$\begin{aligned} \bar{D}_R(1) &\approx 10,544, \quad \bar{D}_R\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1,4571, \quad I_4 \approx 75,589, \\ I_6 &\approx 659,87, \quad d=3, \\ \bar{D}_R(1) &\approx 135,3, \quad \bar{D}_R\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1,465, \quad I_4 \approx 23,402, \\ I_6 &\approx 71,080, \quad d=2. \end{aligned}$$

При  $d < 2$  расходимости в детерминантах отсутствуют, и результат (5.58) справедлив в терминах затравочных величин (т.е. с заменой  $E \rightarrow E_B$ ,  $\bar{D}_R(1) \rightarrow \bar{D}(1)$ ,  $\bar{D}_R(1/3) \rightarrow \bar{D}(1/3)$ ). При  $d=1$  инстантон имеет вид  $\phi_c(x) = \sqrt{2}/\cosh x$ , а уравнение (5.36) имеет собственные значения  $\mu_s = s(s+1)$ ,  $s=1, 2, \dots$  [39]. Вычисление входящих в (5.58) параметров

$$\bar{D}(1) = -\frac{1}{5}, \quad \bar{D}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \quad I_4 = \frac{16}{3}, \quad I_6 = \frac{128}{15} \quad (5.60)$$

дает результат

$$v(E_B) = \frac{4}{\pi} \frac{|E_B|}{a_0^d W^2} \exp \left\{ -\frac{8|E_B|^{3/2}}{3a_0^d W^2} \right\}, \quad (5.61)$$

совпадающий с точным решением Гальперина [40, 63].

<sup>12</sup> В окончательных формулах (16) работы [43] имеются явные опечатки, но приведенные численные коэффициенты согласуются с формулой (5.59).

**6.  $(4 - \epsilon)$ -мерная теория**

В настоящем разделе удобно коэффициент при  $|\phi|^4$  в гамильтониане (1.14) обозначить через  $u$ :

$$H\{\phi\} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2} \kappa_0^2 |\phi|^2 + \frac{1}{4} u |\phi|^4 \right\}, \quad (6.1)$$

сохраняя обозначение  $g_0$  для безразмерной величины

$$g_0 = uA^{-\epsilon}. \quad (6.2)$$

**6.1. Структура приближения для  $\Sigma(0, \kappa)$**

При  $d = 4 - \epsilon$  ряд теории возмущений для собственной энергии  $\Sigma(p, \kappa)$  при  $p = 0$  имеет структуру

$$\begin{aligned} \kappa^2 + \Sigma(0, \kappa) - \Sigma(0, 0) &\equiv \kappa^2 Y(\kappa) = \\ &= \kappa^2 \sum_{N=0}^{\infty} (uA^{-\epsilon})^N \sum_{K=0}^N A_N^K(\epsilon) \left[ \frac{(A/\kappa)^\epsilon - 1}{\epsilon} \right]^K, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где  $A_N^K(\epsilon)$  конечны при  $\epsilon \rightarrow 0$  и  $A_0^0(\epsilon) \equiv 1$ . Разложение (6.3) следует из того, что величина  $Y$  в  $N$ -м порядке теории возмущений является однородным полиномом степени  $N$ , составленным из  $A^{-\epsilon}$  и  $\kappa^{-\epsilon}$ : действительно, при переходе от диаграммы  $N$ -го порядка к диаграмме  $(N + 1)$ -го порядка размерность по импульсу уменьшается на  $\epsilon$  [46], что дает множитель  $A^{-\epsilon}$  или  $\kappa^{-\epsilon}$ , в зависимости от того, какими импульсами — большими или малыми — определяется соответствующий вклад. Выделение из коэффициентов  $A_N^K(\epsilon)$  множителей  $\epsilon^{-K}$  обеспечивает предельный переход к формуле (4.11) при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

После разложения коэффициентов  $A_N^K(\epsilon)$  в ряды по  $\epsilon$

$$A_N^K(\epsilon) = \sum_{L=0}^{\infty} A_N^{K,L} \epsilon^L \quad (6.4)$$

и перехода к пределу  $A \rightarrow 0$  разложение (6.3) становится аналогичным выражению (4.11) с заменой больших логарифмов на степени  $1/\epsilon$ . Стандартная процедура  $\epsilon$ -разложения [9, 10] соответствует сохранению в каждом порядке теории возмущений нескольких старших степеней  $1/\epsilon$ ; первое  $\epsilon$ -приближение соответствует ограничению коэффициентами  $A_N^{N,0}$ , совпадающими с коэффициентами при главных логарифмах в формуле (4.11). Аналогично случаю  $d = 4$  при  $u < 0$  такого приближения недостаточно из-за более высокой скорости роста по  $N$  коэффициентов при младших степенях  $1/\epsilon$ : ограничение коэффициентами  $A_N^{N,0}$  возможно лишь при  $N \sim 1$ , тогда как при больших  $N$  нужно учитывать все  $A_N^{K,L}$  с вычислением их в главной асимптотике по  $N$ .

Согласно разложению (6.3) величина  $Y$  является функцией  $g_0$  и  $A/\kappa$ ; она обладает мультипликативной перенормируемостью и удовлетворяет уравнению Каллана–Симанчика [38, 39]

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln A} + W(g_0, \epsilon) \frac{\partial}{\partial g_0} + V(g_0, \epsilon) \right] Y = 0. \quad (6.5)$$

Функции  $W(g_0, \epsilon)$  и  $V(g_0, \epsilon)$  раскладываются в ряды

$$W(g_0, \epsilon) = \sum_{M=1}^{\infty} W_M(\epsilon) g_0^M = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{M'=0}^{\infty} W_{M,M'} g_0^M \epsilon^{M'},$$

$$V(g_0, \epsilon) = \sum_{M=1}^{\infty} V_M(\epsilon) g_0^M = \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{M'=0}^{\infty} V_{M,M'} g_0^M \epsilon^{M'}, \quad (6.6)$$

первые коэффициенты которых вычислены в [46]<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} W_1(\epsilon) &= -\epsilon, & W_{2,0} &= K_4(n+8), \\ W_{3,0} &= -3K_4^2(3n+14), & V_{1,0} &= -K_4(n+2). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Подстановка разложений (6.3) и (6.6) в уравнение (6.5) приводит к системе уравнений для коэффициентов  $A_N^K(\epsilon)$ :

$$\begin{aligned} (K+1)A_N^{K+1}(\epsilon) &= (N-K)\epsilon A_N^K(\epsilon) - \\ &- \sum_{M=1}^{N-K} [(N-M)W_{M+1}(\epsilon) + V_M(\epsilon)] A_{N-M}^K(\epsilon). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Из нее нетрудно получить аналогичную систему уравнений для коэффициентов  $A_N^{K,L}$  в разложении (6.4). Метод Вильсона [9, 10] основан на том, что в  $n$ -м  $\epsilon$ -приближении требуется знать коэффициенты  $A_N^{N-K,L}$  с  $K+L \leq n-1$ , для которых получается замкнутая система разностных уравнений

$$\begin{aligned} -Nx_N &= [W_{2,0}(N-1) + V_{1,0}]x_{N-1}, \\ -(N-1)y_N &= [W_{2,0}(N-1) + V_{1,0}]y_{N-1} + \\ &+ [W_{3,0}(N-2) + V_{2,0}]x_{N-2}, \\ -Nz_N &= [W_{2,0}(N-1) + V_{1,0}]z_{N-1} + \\ &+ [W_{2,1}(N-1) + V_{1,1}]x_{N-1} - y_N, \\ &\dots, \end{aligned} \quad (6.9)$$

решение которой методом вариации постоянных [64] позволяет последовательно найти  $x_N \equiv A_N^{N,0}$ ,  $y_N \equiv A_N^{N-1,0}$ ,  $z_N \equiv A_N^{N-1,1}, \dots$ ; задание начальных условий к ней и определение  $W_{2,0}, V_{1,0}, \dots$  требует вычисления нескольких низших порядков теории возмущений. Выделяя главную асимптотику по  $N$ , нетрудно доказать по индукции, что

$$\begin{aligned} A_N^{N-K,L} &= C_{K+L}^K (-W_{2,0})^N \frac{\Gamma(N-\beta_0)}{\Gamma(N+1)\Gamma(-\beta_0)} \times \\ &\times \frac{(-W_{3,0})^{K+L}}{(-W_{2,0})^{2(K+L)}} \frac{(N \ln N)^{K+L}}{(K+L)!}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

где  $\beta_0 = -V_{1,0}/W_{2,0} = (n+2)/(n+8)$ . Для паркетных коэффициентов  $A_N^{N,0}$  результат (6.10) является точным.

Для исследования высших порядков по  $\epsilon$  метод Вильсона оказывается неэффективным и удобнее исходить из системы уравнений (6.8), которая по структуре представляет собой рекуррентное соотношение для вычисления  $A_N^{K+1}(\epsilon)$  по заданным  $A_N^K(\epsilon), A_{N-1}^K(\epsilon), \dots, A_K^K(\epsilon)$ . Информация о коэффициентах  $A_N^K(\epsilon)$  с  $N \gg 1$  может быть получена методом Липатова; согласно разделу 5.5,  $N$ -й коэффициент разложения  $\Sigma(p, \kappa)$  по

<sup>13</sup> Согласно [38, 39] функция  $V(g_0, \epsilon)$  совпадает с введенной в работе [46] функцией  $\eta_2(g_0, \epsilon)$ . Отметим, что необходимо различать функции  $W$  и  $\eta_2$  для различных ренормализаций (см. приложение 1 в [38]).

степеням  $u$  определяется формулой (5.51). Представляя (5.51) в виде разложения (6.3), получим

$$A_N^K(\epsilon) = \tilde{c}_2 \Gamma(N+b) a^N C_N^K \int_0^\infty d \ln R^2 \times \\ \times R^{-2} \left\{ \epsilon + \frac{2K_d I_4}{N} \exp[f(R) - \epsilon \ln R] \right\}^K \times \\ \times \exp \left[ -Nf(R) + N\epsilon \ln R + 2K_d I_4(R) \frac{1-R^{-\epsilon}}{\epsilon} \right], \quad (6.11)$$

где  $\tilde{c}_2 = c_2 \langle \phi_\zeta^3 \rangle_0^2$ .

Метод Липатова хорошо воспроизводит коэффициенты  $A_N^K(\epsilon)$  только для  $K \ll N$ , что связано с их быстрым убыванием по  $K$  и ограниченной точностью главной асимптотики (порядка  $1/N$ ); легко убедиться, что при  $K \ll N$  результат (6.11) удовлетворяет уравнению (6.8)<sup>14</sup>, если в сумме по  $M$  сохранить лишь член с  $M = 1$ . Это возможно ввиду факториального роста  $A_N^K(\epsilon)$  по  $N$  в предположении, что  $W_N(\epsilon)$  и  $V_N(\epsilon)$  (присутствующие в уравнениях с  $K = 0, 1$ ) растут медленнее, чем  $A_N^0(\epsilon)$ ; последнее можно считать следствием справедливости формулы (6.11) при  $K = 0, 1, 2$ .

Система уравнений (6.8) определяет  $A_N^K(\epsilon)$  с  $K > 0$  по заданным  $A_N^0(\epsilon)$ . Поскольку формула (6.11) справедлива для коэффициентов  $A_N^0(\epsilon)$  при всех  $N \gg 1$ , ее можно использовать в качестве граничного условия к системе (6.8), что позволяет определить все  $A_N^K(\epsilon)$  с большими  $N$ . Тогда, сохраняя при  $N \sim 1$  лишь главный порядок по  $1/\epsilon$ , определяемый коэффициентами (6.11), нетрудно найти сумму ряда (6.3).

Рекуррентное соотношение (6.8) может быть редуцировано при больших  $N$  ввиду факториального роста  $A_N^K(\epsilon)$ , вследствие которого  $A_{N-1}^K(\epsilon) \sim A_N^K(\epsilon)/N$ . Фактически оказывается, что в правой части (6.8) необходимо сохранить члены с  $A_N^K(\epsilon)$ ,  $A_{N-1}^K(\epsilon)$ ,  $A_{N-2}^K(\epsilon)$ . Дело в том, что формально старший по  $N$  член с  $A_N^K(\epsilon)$  содержит малый множитель  $\epsilon$  и в области  $N\epsilon \lesssim 1$  мал по сравнению с  $A_{N-1}^K(\epsilon)$ , а заведомо малый член с  $A_{N-2}^K(\epsilon)$  необходим для получения достаточной точности: для вычисления произвольного  $A_N^K(\epsilon)$  по известным  $A_N^0(\epsilon)$  требуется порядка  $N$  итераций, что при точности каждой итерации  $\sim 1/N$  приводит к накоплению ошибок. Редуцированное уравнение может быть формально решено прямыми итерациями, после чего результат может быть упрощен в пределе больших  $N$ .

Аналогично случаю  $d = 4$  (см. рис. 7) в плоскости  $(N, K)$  можно выделить область  $I$  (рис. 9), где коэффициенты  $A_N^K(\epsilon)$  определяются коэффициентами  $A_N^0(\epsilon)$  с большими  $N$ , для которых справедлива асимптотика Липатова, и область  $II$  ( $M \ll \ln N$ ,  $N\epsilon \ll 1$ ), "управляемую" тривиальным коэффициентом  $A_0^0(\epsilon) = 1$ , между которыми лежит область неуниверсальности  $III$  ( $M \sim \ln N$ ,  $N\epsilon \lesssim 1$ ), где существенна информация о коэффициентах  $A_N^0(\epsilon)$  с  $N \sim 1$ ; последняя область не дает существенного вклада в сумму (6.3).

Приведем результаты для коэффициентов  $A_N^K(\epsilon)$ , которые определяют сумму (6.3) в континуальном пределе  $A \rightarrow \infty$ . В области  $Nt > 1$  или  $1 - Nt \ll \epsilon^{1/2}$  (опреде-

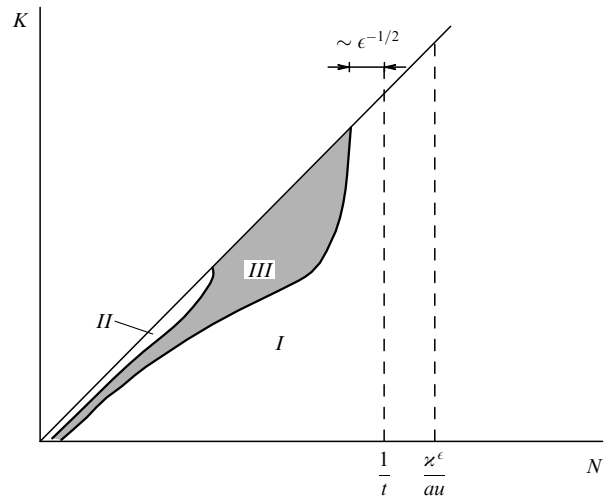


Рис. 9. Области  $I$  и  $II$ , дающие непертурбативный и квазипаркетный вклады в сумму (6.3), и область неуниверсальности  $III$ ; параметр  $t \sim \epsilon$  определен в (6.15). Непертурбативный вклад эффективно оценивается при  $N = z^\epsilon/au$ ; неравенство  $z^\epsilon/au > 1/t$  выявляется в результате решения уравнения (6.19).

ление  $t$  см. в формуле (6.15)) имеем

$$A_N^K(\epsilon) = \tilde{c}_2 \Gamma(N - \beta) \epsilon^N a^N F(N), \quad (6.12)$$

где

$$F(N) = \left( \frac{t}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left[ f_\infty (Nt \ln N - 1) + \frac{1}{t} \right] \times \\ \times \int_0^\infty dx \exp \left[ -\frac{t}{2} \left( N - \frac{1}{t} - x \right)^2 \right] x^{b+\beta-f_\infty Nt} J(x), \quad (6.13)$$

$$J(N) = \int_0^\infty d \ln R^2 R^{2/3} \exp \left[ -Nf(R) + N\epsilon \ln R \right], \quad (6.14)$$

$$t = -\frac{\epsilon a}{W_2(\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{3\epsilon}{n+8}, \quad \beta(\epsilon) = -\frac{V_1(\epsilon)}{W_2(\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \beta_0,$$

$$f_\infty = \frac{W_3(\epsilon)}{aW_2(\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{3n+14}{n+8}. \quad (6.15)$$

При  $N\epsilon \ll 1$  имеем результат вида (6.4) с коэффициентами  $A_N^{K,L}$ , определяемыми формулой (6.10).

## 6.2. Перенормировка энергии и затухание

Имеются два существенных вклада в сумму (6.3): непертурбативный и квазипаркетный, возникающие соответственно от областей  $I$  и  $II$  (см. рис. 9). Квазипаркетный вклад в сумму (6.3) определяется коэффициентами  $A_N^{N-K,L}$  с  $K, L \sim 1$  и вычисляется на основе формулы (6.10); при  $A \rightarrow \infty$  он может быть записан в виде

$$[Y(z)]_{\text{quasiparq}} = \left( 1 + \frac{W_{2,0} \tilde{u} z^{-\epsilon}}{\epsilon} \right)^{\beta_0}, \\ \tilde{u} \approx u \left( 1 + \frac{W_{3,0}}{W_{2,0}^2} \epsilon \ln \epsilon \right), \quad (6.16)$$

отличающемся от паркетного [52] лишь заменой  $u$  на  $\tilde{u}$ .

Для вычисления непертурбативного вклада воспользуемся выражением (6.12) и просуммируем ряд (6.3) по  $N$

<sup>14</sup> Мы имеем в виду условие  $N \gg 1$ . При более сильном условии  $N\epsilon \gg 1$  метод Липатова воспроизводит коэффициенты при всех  $K$ , в чем можно убедиться тем же способом.

от некоторого большого  $N_0$  до бесконечности:

$$\begin{aligned} [\Sigma(0, \kappa)]_{\text{nonpert}} &\equiv i\Gamma_0(\kappa^2) = \\ &= i\pi\tilde{c}_2\kappa^2 \left(\frac{\kappa^\epsilon}{au}\right)^b \exp\left(-\frac{\kappa^\epsilon}{au}\right) F\left(\frac{\kappa^\epsilon}{au}\right). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Здесь использована формула

$$\begin{aligned} \text{Im} \sum_{N=N_0}^{\infty} \Gamma(N+b)a^N(g_0 - i0)^N f(N) = \\ = \frac{\pi}{(ag_0)^b} \exp\left(-\frac{1}{ag_0}\right) f\left(\frac{1}{ag_0}\right), \quad ag_0 > 0, \end{aligned} \quad (6.18)$$

справедливая для медленно меняющихся функций  $f(N)$ ; ее можно получить путем разложения  $f(N)$  в интеграл Фурье с последующим использованием формулы (4.10) и с учетом наличия лишь длинноволновых фурье-компонент. Произвол в определении  $f(N)$  при  $N < N_0$  позволяет удовлетворить условию медленности изменений для любой функции  $f(N)$ , меняющейся при больших  $N$  не быстрее, чем степенным образом. Необычное явление, связанное с расходимостью ряда, состоит в том, что сумма в (6.18) определяется сколь угодно большими  $N$  (поэтому результат не зависит от  $N_0$ ), но в результате входит значение функции  $f(N)$  при конечном  $N = 1/ag_0$ . Поэтому поправочный множитель, отличающий выражение (6.12) от (6.11) и равный единице при  $N \rightarrow \infty$ , эффективно оценивается при  $N = \kappa^\epsilon/au$  и оказывается существенным.

Учитывая в сумме (6.3) вклады (6.16) и (6.17), получим уравнение

$$\kappa_0^2 - \kappa_c^2 = \kappa^2 \left(1 + \frac{8K_4\tilde{u}\kappa^{-\epsilon}}{\epsilon}\right)^{1/4} + i\Gamma_0(\kappa^2), \quad \kappa^2 = -E - i\Gamma, \quad (6.19)$$

где  $\kappa_c^2 = \Sigma(0, 0)$  и учтено, что  $\kappa_0^2 = \kappa^2 + \Sigma(0, \kappa)$ . Полагая

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= |\kappa|^2 \exp(-i\varphi), \quad x = \frac{2}{\epsilon} \left[ \left(\frac{|\kappa|^2}{\Gamma_c}\right)^{\epsilon/2} - 1 \right], \\ \Gamma_c &= \left(\frac{8K_4|\tilde{u}|}{\epsilon}\right)^{2/\epsilon}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

выделяя действительную и мнимую часть (6.19) и учитывая, что решение существует лишь при больших  $x$ , получим связь затухания  $\Gamma$  и перенормированной энергии  $E$  с затравочной энергией  $E_B = -\kappa_0^2$  в параметрической форме:

$$\Gamma = \Gamma_c \left(1 + \frac{\epsilon x}{2}\right)^{2/\epsilon} \sin \varphi, \quad E = -\Gamma_c \left(1 + \frac{\epsilon x}{2}\right)^{2/\epsilon} \cos \varphi, \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} -E_B + E_c &= \Gamma_c \left(1 + \frac{\epsilon x}{2}\right)^{2/\epsilon} \left(\frac{\epsilon x/2}{1 + \epsilon x/2}\right)^{1/4} \times \\ &\times \left[ \cos\left(\varphi + \frac{\varphi}{4x}\right) - \tan \frac{\varphi(1 + 2\epsilon x)}{3} \sin\left(\varphi + \frac{\varphi}{4x}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Здесь  $x(\varphi)$  — однозначная функция в интервале  $0 < \varphi < \pi$ , показанная на рис. 10 и удовлетворяющая

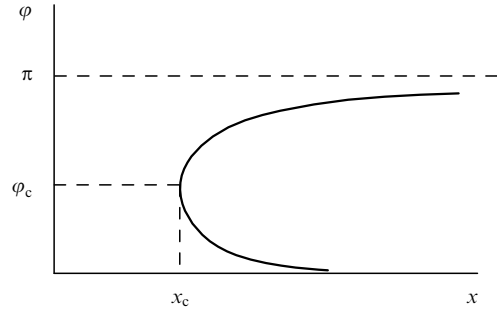


Рис. 10. Вид функции  $\varphi(x)$ .

уравнению

$$\sin\left(\varphi + \frac{\varphi}{4x}\right) = \frac{\exp(-4x/3)}{x^{1/4}} I(x) \cos \frac{\varphi(1 + 2\epsilon x)}{3}. \quad (6.23)$$

Функция  $I(x)$  определяется выражением

$$\begin{aligned} I(x) &= \tilde{c}_2 \left(\frac{3}{4}\right)^{1/4} \left(\frac{\pi t}{2}\right)^{1/2} \times \\ &\times \exp\left[-f_\infty + f_\infty \frac{2 + \epsilon x}{2} \ln \frac{\bar{\Delta}(1 + \epsilon x/2)}{t}\right] \times \\ &\times \int_0^\infty dz \exp\left[-\frac{t}{2} \left(\frac{\epsilon x}{2t} - z\right)^2\right] z^{b+\beta-f_\infty(1+\epsilon x/2)} J(z), \end{aligned} \quad (6.24)$$

где

$$\bar{\Delta} \approx \frac{7}{8} \epsilon \ln \frac{1}{\epsilon},$$

а величина  $E_c$  определяет сдвиг края зоны и в однопетлевом приближении равна

$$E_c = -W^2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\epsilon(p)}. \quad (6.25)$$

Формулы (6.21), (6.23) существенно упрощаются в двух перекрывающихся областях. При  $x \gg \ln(1/\epsilon)$ , т.е. в области больших  $|E|$ , когда правая часть (6.23) мала, и величина  $\varphi$  близка к 0 или  $\pi$ , для зависимости  $\Gamma(E)$  получаются асимптотики

$$\Gamma(E) = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{8}\right) \epsilon E \left[\left(\frac{E}{\Gamma_c}\right)^{\epsilon/2} - 1\right]^{-1}, & E \gg \Gamma, \\ \Gamma_0(E) \left[1 - \left(\frac{|E|}{\Gamma_c}\right)^{-\epsilon/2}\right]^{-1/4}, & -E \gg \Gamma, \end{cases} \quad (6.26)$$

создающие иллюзию ложного полюса [20, 27] ( $\Gamma_0(E) \equiv \Gamma_0(|\kappa|^2)$ ); при больших положительных  $E$  воспроизводится результат кинетического уравнения, при больших отрицательных  $E$  затухание становится чисто непертурбативным. При  $x \lesssim \epsilon^{-1/2}$ , т.е. в окрестности ложного полюса, функцию  $I(x)$  можно заменить на  $I(0) \sim \epsilon^{-7/12} [\ln(1/\epsilon)]^{17/12}$ . Минимальное значение величины  $x$  с логарифмической точностью оказывается равным

$$x_{\min} \approx \frac{7}{16} \ln \frac{1}{\epsilon}, \quad (6.27)$$

так что ложный полюс обходится на расстоянии порядка  $\epsilon \ln(1/\epsilon)$ , и эффективное взаимодействие (см. раздел 3) остается логарифмически слабым<sup>15</sup>.

**6.3. Собственная энергия  $\Sigma(p, \kappa)$  при конечных импульсах**

Для вычисления плотности состояний необходимо знать собственную энергию  $\Sigma(p, \kappa)$  при конечных импульсах. Как и при  $p = 0$ , эта величина состоит из непертурбативного и квазипаркетного вкладов; обсудим их вычисление.

**6.3.1. Паркетное приближение.** Прежде всего вычислим  $\Sigma(p, \kappa)$  в паркетном приближении, что можно сделать путем некоторого развития работы Гинзбурга [52]. Из тождества Уорда имеем

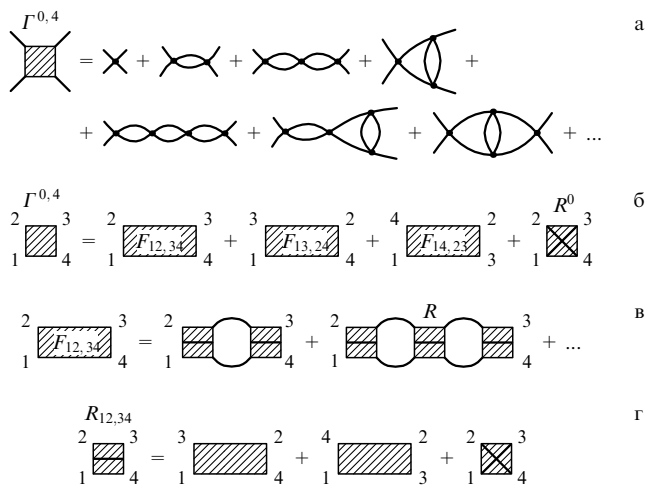
$$\frac{\partial G^{-1}(p, \kappa)}{\partial \kappa_0^2} \delta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} G(q)^2 \Gamma_{\alpha\sigma\sigma\beta}^{(0,4)}(p, -q, q, -p), \tag{6.28}$$

где  $\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}^{(0,4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$  — полная четыреххвостная вершина ( $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$ ). Как обычно в паркетных вычислениях [52, 55], перейдем в вершине от импульсов  $p_1, p_2, p_3, p_4$  к импульсам  $p', p, q$ , где

$$2p' = p_4 - p_3, \quad 2p = p_1 - p_2, \quad q = p_1 + p_2 = -p_3 - p_4, \tag{6.29}$$

а нумерация концов четыреххвостки выбрана так, что  $p' > p > q > 0$ .

В главном логарифмическом приближении при  $d = 4$  вычисление  $\Gamma^{(0,4)}(p', p, q)$  требует суммирования паркетных диаграмм (рис. 11а), получаемых путем последовательного расщепления простых вершин на две части, соединенные двумя линиями: при увеличении порядка



**Рис. 11.** Паркетная последовательность диаграмм для  $\Gamma^{(0,4)}$  (а) (получается последовательным расщеплением простых вершин на две части, соединенные парой линий); система уравнений для полной вершины  $\Gamma^{(0,4)}$ , трех "кирпичей"  $F_{ij,kl}$ , трех "перечеркнутых" вершин  $R_{ij,kl}$  и неприводимой вершины  $R^0$  (б-г); аппроксимация  $R^0 = -2u$  соответствует суммированию последовательности диаграмм (а).

<sup>15</sup> В пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  необходимо учитывать конечность параметра обрезания  $\Lambda$ , в результате чего расстояние до ложного полюса остается конечным.

диаграммы на единицу малость  $\sim g_0$ , связанная с дополнительной вершиной, компенсируется большим логарифмом, связанным с дополнительной парой линий [11]; при  $d = 4 - \epsilon$  вместо большого логарифма возникает параметр  $1/\epsilon$ . Используя для  $\Gamma^{(0,4)}$  в (6.28) результаты работы [52] и учитывая связь  $G^{-1}(p, \kappa)$  и  $\Sigma(p, \kappa)$ , получим искомый результат паркетного приближения:

$$\Sigma(p, \kappa) = \Sigma(0, 0) + \kappa^2 \left\{ t(x_\infty)^{(n+2)/(n+8)} + \frac{6}{n-4} \left[ \frac{t(x_\infty)}{t(x)} \right]^{(n+2)/(n+8)} - \frac{n+2}{n-4} \left[ \frac{t(x_\infty)}{t(x)} \right]^{6/(n+8)} \right\},$$

$$t(x) = 1 + K_d \Lambda^{-\epsilon} (n+8) u x, \quad x = \frac{(\Lambda/p)^\epsilon - 1}{\epsilon},$$

$$x_\infty = \frac{(\Lambda/\kappa)^\epsilon - 1}{\epsilon}, \tag{6.30}$$

откуда результат для неупорядоченной системы получается при  $n \rightarrow 0$ . Формула (6.30) справедлива при  $p \gtrsim \kappa$ , и потому предел  $p \rightarrow 0$  понимается как  $p \rightarrow \kappa$ .

**6.3.2. Паркет в высших порядках по  $\epsilon$ .** При  $p = 0$  квазипаркетный вклад в  $\Sigma(0, \kappa)$  определяется коэффициентами  $A_N^{N-K, L}$  с  $K, L \sim 1$ , причем коэффициенты с  $K, L \neq 0$  существенны лишь для больших  $N$ . Возникает проблема формулировки аналогичного квазипаркетного приближения при конечных импульсах. Требуется произвести вычисление  $\Sigma(p, \kappa)$  в произвольном конечном порядке по  $\epsilon$ , но с учетом лишь главной асимптотики по  $N$  для непаркетных коэффициентов разложения.

Как мы видели выше, для вычисления  $\Sigma(p, \kappa)$  требуется знание четыреххвостной вершины  $\Gamma^{(0,4)}(p, k, q)$ , зависящей от трех существенно различных импульсов,  $p \gg k \gg q \gg \kappa$ . Используемый выше метод позволяет найти квазипаркетный вклад в  $\Gamma^{(0,4)}$  при  $p \sim k \sim q \gg \kappa$ : записывая разложение типа (6.3)

$$\Gamma^{(0,4)}(p, p, p) = \sum_{N=1}^{\infty} (u \Lambda^{-\epsilon})^N \sum_{K=0}^{N-1} A_N^K(\epsilon) \left[ \frac{(\Lambda/p)^\epsilon - 1}{\epsilon} \right]^K \tag{6.31}$$

(с другими коэффициентами  $A_N^K(\epsilon)$ ) и пользуясь тем, что вершина  $\Gamma^{(0,4)}$  обладает мультипликативной перенормируемостью [46] и удовлетворяет уравнению Каллана – Симанчика (4.20)<sup>16</sup>, получим уравнение, аналогичное (6.8), из которого можно получить результат типа (6.10), после чего суммирование по области  $\Pi$  дает

$$\begin{aligned} [\Gamma^{(0,4)}(p, p, p)]_{\text{quasiparq}} &= \\ &= \frac{-2u}{\Delta + (W_3/W_2) u p^{-\epsilon} \ln \Delta} \Big|_{\Delta=1+W_2 u p^{-\epsilon}/\epsilon} \approx \frac{-2\tilde{u}}{1 + W_2 \tilde{u} p^{-\epsilon}/\epsilon} \end{aligned} \tag{6.32}$$

(логарифмический член существен лишь вблизи корня величины  $\Delta$ , и в нем можно сделать замены  $u p^{-\epsilon} \rightarrow -\epsilon/W_2$  и  $\Delta \rightarrow \bar{\Delta}$ ).

Известно, что к паркетному приближению можно подойти с точки зрения общего структурного анализа диаграмм [11, 53]: полная вершина  $\Gamma^{(0,4)}$  представляется в

<sup>16</sup> При этом  $V(g_0, \epsilon) \equiv -2\eta(g_0, \epsilon)$ , где  $\eta(g_0, \epsilon)$  — функция, введенная в работе [46].

виде трех "кирпичей"  $F_{ij,kl}$  и неприводимой четыреххвостки  $R^0$  (рис. 11б); каждый кирпич является суммой диаграмм, приводимых по паре линий в соответствующем канале и получаемых путем повторения "перечеркнутой" вершины  $R$  (рис. 11в), которая в свою очередь есть сумма двух кирпичей и неприводимой четыреххвостки (рис. 11г). Составляя уравнения типа (в, г) (см. рис. 11) для двух других кирпичей, получим систему семи уравнений для восьми величин [53]; все величины однозначно определяются заданием вершины  $R^0$ , так что

$$\Gamma^{(0,4)}(p, k, q) = F\{R^0(p, k, q)\}, \quad (6.33)$$

где  $F\{\dots\}$  — некоторый функционал. Паркетное приближение соответствует замене неприводимой четыреххвостки на простую вершину,  $R^0(p, k, q) = -2u$ , так как при этом система (б–г) соответствует суммированию диаграмм (а) (см. рис. 11).

В приложении 2 работы [38] доказывается, что при  $d = 4$  вершина  $R^0$  зависит лишь от максимального импульса; по непрерывности это свойство сохраняется и при малых  $\epsilon$ . С учетом этого (6.33) принимает вид

$$\Gamma^{(0,4)}(p, k, q) = F\{R^0(p, p, p)\}. \quad (6.34)$$

Полагая  $k = q = p$  и обращая формулу (6.34), можно получить приближение для  $R^0$ , соответствующее результату (6.32), после чего выражение (6.34) в принципе решает задачу.

Функционал  $F\{\dots\}$  определяется системой уравнений (б–г) (рис. 11), которая очень сложна и, по-видимому, никогда не решалась: обычно пользуются упрощенными паркетными уравнениями, получаемыми методом Судаква [54], модифицированным Поляковым [55]. Этот метод не предполагает какого-либо конкретного приближения для  $R^0$ , но основан на логарифмических вычислениях интегралов, в которых пределы интегрирования оцениваются лишь по порядку величины. Аналогичная процедура применима и при  $d = 4 - \epsilon$ , например,

$$\int_0^A \frac{k^{d-1} dk}{(k^2 + \kappa^2)^2} = \int_{\sim \kappa}^A \frac{k^{d-1} dk}{k^4} = \frac{\kappa^{-\epsilon} - A^{-\epsilon}}{\epsilon} + O(\epsilon^0). \quad (6.35)$$

Нижний предел во втором интеграле определен лишь по порядку величины, но эта неопределенность не затрагивает основного вклада, так как замена  $\kappa \rightarrow c\kappa$  дает множитель  $c^{-\epsilon} \approx 1 - \epsilon \ln c$  и сказывается только на величине  $O(\epsilon^0)$ . На первый взгляд такой способ вычислений оправдан лишь в главном порядке по  $\epsilon$ ; действительно, в выражении (6.3) с  $A \rightarrow \infty$  замена  $\kappa \rightarrow c\kappa$  в членах главного порядка по  $\epsilon$  приводит к изменению коэффициентов при высших степенях  $\epsilon$ :

$$A_N^{N,L} \rightarrow A_N^{N,L} + \frac{(-\ln c)^L}{L!} N^L A_N^{N,0}, \quad L \sim 1. \quad (6.36)$$

Однако, согласно (6.10),  $A_N^{N,L} \sim A_N^{N,0} (N \ln N)^L$ , и главная асимптотика по  $N$  "не чувствительна" к замене  $\kappa \rightarrow c\kappa$ ; поэтому при учете лишь главного порядка по  $N$  указанные вычисления допустимы в произвольном конечном порядке по  $\epsilon$ . Это позволяет полностью сохранить паркетную схему при вычислении квазипаркетного вклада в  $\Gamma^{(0,4)}$ .

Подставляя (6.32) в паркетное уравнение [52, 53, 55]

$$\Gamma^{(0,4)}(x, x, x) = R^0(x, x, x) + \frac{1}{2} K_d A^{-\epsilon} (n+8) \int_0^x dt [\Gamma^{(0,4)}(t, t, t)]^2, \quad (6.37)$$

получим  $R^0(x, x, x) = -2\tilde{u}$ , и  $[\Sigma(p, \kappa)]_{\text{quasiparq}}$  получается из паркетного результата (6.30) путем замены  $u$  на  $\tilde{u}$ .

**6.3.3. Непертурбативный вклад.** Непертурбативный вклад оказывается существенным (см. раздел 6.4) лишь в области больших отрицательных  $E$  и может быть вычислен непосредственно по асимптотике Липатова (5.51) (при  $N = \kappa^\epsilon / au \gg 1/\epsilon$  поправочный множитель, отличающий результаты типа (6.12) и (6.11), равен единице)

$$\begin{aligned} [\Sigma(p, \kappa)]_{\text{nonpert}} &= i\pi c_2 \kappa^2 \left(\frac{\kappa^\epsilon}{au}\right)^b \exp\left(-\frac{\kappa^\epsilon}{au}\right) \times \\ &\times \int_0^\infty d \ln R^2 R^{-2} \langle \phi_c^3 \rangle_{pR/\kappa} \langle \phi_c^3 \rangle_{-pR/\kappa} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{\kappa^\epsilon}{au} [f(R) - \epsilon \ln R] + \frac{2K_d I_4(R)}{\epsilon}\right\}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

При  $p = 0$  интеграл определяется окрестностью перемальной точки  $R_0$ , являющейся корнем уравнения

$$\epsilon = 6R_0^2(-\ln R_0 + \ln 2 - C - 1), \quad (6.39)$$

так что  $R_0 \approx [\epsilon/3 \ln(1/\epsilon)]^{1/2}$ ; при  $p \lesssim \kappa R_0^{-1}$  выражение (6.38) не зависит от  $p$ , при  $p \gtrsim \kappa R_0^{-1}$  — быстро убывает с ростом  $p$ . Ввиду логарифмической точности последующих вычислений (см. раздел 6.4) для (6.38) можно использовать следующую аппроксимацию:

$$[\Sigma(p, \kappa)]_{\text{nonpert}} \approx [\Sigma(0, \kappa)]_{\text{nonpert}} \theta(\kappa R_0^{-1} - p). \quad (6.40)$$

Окончательный результат для  $\Sigma(p, \kappa)$  дается суммой квазипаркетного и непертурбативного вкладов

$$\begin{aligned} \Sigma(p, \kappa) - \Sigma(0, \kappa) &= \kappa^2 \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left[ \frac{t(x)}{t(x_\infty)} \right]^{-1/4} + \frac{1}{2} \left[ \frac{t(x)}{t(x_\infty)} \right]^{-3/4} \right\} - \\ &- i\Gamma_0(\kappa^2) \theta(p - \kappa R_0^{-1}), \end{aligned} \quad (6.41)$$

где

$$t(x) = 1 + \frac{8K_4 \tilde{u} x}{\epsilon}, \quad x = p^{-\epsilon}, \quad x_\infty = \kappa^{-\epsilon}. \quad (6.42)$$

### 6.4. Вычисление плотности состояний

Плотность состояний  $\nu(E)$  определяется формулой:

$$\nu(E) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} G(p, \kappa) \equiv \frac{1}{\pi} \text{Im} Y(\kappa) \Big|_{\kappa^2 = -E - i\Gamma}. \quad (6.43)$$

Главный вклад в интеграл дает область  $|p| \gtrsim \kappa$ , для которой

$$Y(\kappa) \approx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2} - \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\kappa^2 - \Sigma(p, \kappa) + \Sigma(0, \kappa)}{p^4}. \quad (6.44)$$

Подставляя в формулу (6.44) выражение (6.41) и исключая  $\Gamma_0(x^2)$  с помощью (6.19), получим результат

$$v = \frac{\Gamma_c}{4\pi|\tilde{u}|} \left(1 + \frac{cx}{2}\right)^{2/\epsilon} \left[ \left(1 + \frac{2}{\epsilon x}\right)^{-1/4} \left(1 - \frac{R_0^\epsilon}{2 + \epsilon x}\right) \times \right. \\ \left. \times \sin\left(\varphi + \frac{\varphi}{4x}\right) - \left(1 + \frac{2}{\epsilon x}\right)^{-3/4} \sin\left(\varphi + \frac{3\varphi}{4x}\right) \right], \quad (6.45)$$

который совместно с формулами (6.21)–(6.23) определяет плотность состояний  $v(E)$  в параметрической форме. Обратим внимание на наличие скейлинга: при измерении энергии в единицах  $\Gamma_c$ , а плотности состояний — в единицах  $\Gamma_c/|\tilde{u}|$  все зависимости определяются универсальными функциями, не зависящими от степени беспорядка. При  $|E| \gg \Gamma$  имеем асимптотики

$$v(E) = \begin{cases} \frac{1}{2} K_4 E^{(d-2)/2} \left[1 - \left(\frac{E}{\Gamma_c}\right)^{-\epsilon/2}\right]^{-1/4}, & E \gg \Gamma, \\ \frac{\Gamma_0(E)}{4\pi|\tilde{u}|} \left\{1 - \frac{R_0^\epsilon}{2} \left(\frac{|E|}{\Gamma_c}\right)^{-\epsilon/2} - \left[1 - \left(\frac{|E|}{\Gamma_c}\right)^{-\epsilon/2}\right]^{1/2}\right\}, & -E \gg \Gamma, \end{cases} \quad (6.46)$$

показывающие ложный полюс. При больших положительных  $E$  функция  $v(E)$  переходит в плотность состояний идеальной системы; при больших отрицательных  $E$  получается результат для флуктуационного хвоста

$$v(E) = \frac{K_4}{\pi} \Gamma_0(E) |E|^{-\epsilon/2} \ln \frac{1}{R_0} = \\ = \tilde{c}_2 K_4 \left(\frac{2\pi}{3} \ln \frac{1}{R_0}\right)^{1/2} R_0^{-3} |E|^{(d-2)/2} \left(\frac{\bar{I}_4 |E|^{\epsilon/2}}{4|u|}\right)^{(d+1)/2} \times \\ \times \exp\left[\frac{2K_d I_4(R_0)}{\epsilon} - \frac{I_4(R_0) |E|^{\epsilon/2}}{4|u| R_0^\epsilon}\right], \quad (6.47)$$

соответствующий традиционному варианту инстантонного метода; он может быть получен также из формулы (6.39). Расходимость при  $\epsilon \rightarrow 0$  устраняется для конечного параметра обрезания  $L$ . Любопытно, что при  $\epsilon x \ll 1$ , формулы (6.21)–(6.23), (6.45) по функциональной форме совпадают с формулами для  $d = 4$  (см. [38]), т.е. поведение всех физических величин в окрестности порога подвижности эффективно оказывается четырехмерным. Точка фазового перехода смещается в комплексную плоскость, что обеспечивает регулярность плотности состояний при всех энергиях.

Отличие  $R_0^\epsilon$  от 1 существенно лишь при  $x^\epsilon/u \gg 1/\epsilon$ , когда происходит почти точная компенсация членов в фигурной скобке (6.46). Замена  $R_0 \rightarrow 1$  в формуле (6.41) соответствует полному пренебрежению величиной  $[\Sigma(p, x)]_{\text{nonpert}}$ , так как интегрирование в формуле (6.44) происходит по области  $p \gtrsim x$ ; таким образом, величина  $[\Sigma(p, x)]_{\text{nonpert}}$  существенна лишь при больших отрицательных  $|E|$ , чем оправдывается ее вычисление непосредственно по асимптотике Липатова.

## 7. Перспектива построения полной теории перехода Андерсона: роль $\epsilon$ -разложения

Как ясно из раздела 1, задачи о вычислении плотности состояний и проводимости неупорядоченной системы, которые определяются соответственно средней функ-

цией Грина  $\langle G(x, x') \rangle$  и коррелятором  $\langle G^R G^A \rangle$ , представляют собой две существенно различные проблемы. Поэтому значение верхней критической размерности для них, в принципе, могло бы быть различным; такое утверждение в явном виде делалось в работе [32], в которой, однако, имеются серьезные ошибки (см. [36]). В действительности это не так: из вышеизложенного ясно, что наиболее фундаментальным образом выделенность размерности  $d = 4$  проявляется в перенормируемости теории, а ситуация с перенормируемостью в обеих проблемах одинакова — это очевидно уже из того, что в них используется одна и та же диаграммная техника [13, 14]. Поэтому верхняя критическая размерность для задачи о проводимости по-прежнему равна четырем (см. также аргумент с принципом Иоффе–Регеля в разделе 2), и потому возможность построения вблизи нее  $\epsilon$ -разложения не вызывает сомнений.

Выделенность размерности  $d = 4$  для задачи о проводимости отчетливо проявляется в предложенном автором симметричном подходе к вычислению критических индексов [19]. Этот подход открывает возможность построения полной теории перехода Андерсона, в которой  $\epsilon$ -разложению отводится совершенно уникальная роль.

В основе "симметричной теории" [19] лежит физическая идея о связи явления локализации с диффузионным полюсом в неприводимой четыреххвостке

$$U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q}) = U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\text{reg}}(\mathbf{q}) + U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\text{sing}}(\mathbf{q}) = \\ = U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\text{reg}}(\mathbf{q}) + \frac{F(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})}{-i\omega + D(\omega, \mathbf{k} + \mathbf{k}')(\mathbf{k} + \mathbf{k}')^2}, \quad (7.1)$$

выдвинутая Вольхардтом и Вольфле в так называемой "самосогласованной теории локализации" [21, 65, 66]. Эта идея согласуется с представлениями теории слабой локализации [67, 68], согласно которой диффузионный полюс в  $U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q})$  определяет главные квантовые поправки к проводимости, которые в свою очередь определяют скейлинговое поведение в пространстве размерности  $d = 2 + \epsilon$ . Диффузионный полюс в  $U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q})$  с классическим коэффициентом диффузии  $D_{cl}$  возникает в результате суммирования "верных" диаграмм [68]; Вольхардт и Вольфле предположили, что при учете *всех* диаграмм  $D_{cl}$  заменяется на точный коэффициент диффузии  $D(\omega, \mathbf{q})$ . В квантовом кинетическом уравнении величина  $U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q})$  играет роль "вероятности перехода", и, используя аппроксимацию типа  $\tau$ -приближения,  $D \propto l \propto \langle U \rangle^{-1}$  ( $l$  — длина пробега,  $\langle \dots \rangle$  — усреднение по импульсам), нетрудно получить уравнение самосогласования теории Вольхардта–Вольфле

$$D \sim \text{const} \times \left( U_0 + F_0 \int \frac{d^d q}{-i\omega + D(\omega, \mathbf{q})q^2} \right)^{-1}, \quad (7.2)$$

которое в оригинальной работе [21] было получено путем грубого решения уравнения Бете–Солпитера. При увеличении беспорядка "вероятность перехода" аномально возрастает из-за уменьшения коэффициента диффузии, обеспечивая возможность его обращения в нуль. В пренебрежении пространственной дисперсией  $D(\omega, \mathbf{q})$  уравнение (7.2) позволяет определить критические индексы проводимости  $\sigma$  и радиуса локализации  $\xi$ ,



которые оказываются равными

$$s = 1, \quad d > 2; \quad v = \begin{cases} \frac{1}{d-2}, & 2 < d < 4, \\ \frac{1}{2}, & d > 4. \end{cases} \quad (7.3)$$

Эти значения индексов удивительным образом согласуются с большинством известных результатов, и возникает подозрение, что они — точные [69].

Исследование [19] показало, что ряд соотношений теории Вольхардта–Вольфле, полученных в [21] ценой гипотез или сомнительных аппроксимаций, могут быть доказаны строго: в частности, удается доказать существование диффузионного полюса в величине  $U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q})$  (с наблюдаемым коэффициентом диффузии  $D(\omega, \mathbf{q})$ ), результат для  $D(\omega, \mathbf{q})$  в локализованной фазе

$$D(\omega, \mathbf{q}) = (-i\omega)d(q), \quad \omega \rightarrow 0 \quad (7.4)$$

и связь коэффициента диффузии с радиусом локализации волновых функций,  $D(\omega, 0) \sim (-i\omega)\xi^2$ .

Эти результаты привели к чрезвычайно острой постановке проблемы перехода Андерсона. Действительно, из (7.4) ясно, что в локализованной фазе  $D(0, \mathbf{q}) \equiv 0$ . Возникает вопрос о характере изменения пространственной дисперсии  $D$  вблизи перехода. Наиболее естественная возможность состоит в том, что в точке перехода  $D(0, \mathbf{q})$  обращается в нуль сразу при всех  $\mathbf{q}$ : такая гипотеза высказывалась Ефетовым [33], из нее же исходили Вольхардт и Вольфле. Эта возможность выглядит совершенно невероятной в рамках феноменологических соображений в духе теории Ландау: действительно, должно происходить одновременное обращение в нуль целой функции независимо от способа приближения к критической точке и от положения этой точки на критической поверхности. Ясно, что это не может произойти случайно и должно поддерживаться какой-то глубокой симметрией. Существует ли эта симметрия и какова она? Другими словами, такой сценарий означает, что параметр порядка является не числом, а функцией; последствия этого для структуры теории очевидны. Вторая возможность состоит в том, что  $D(0, \mathbf{q})$  обращается в нуль в какой-то одной точке, после чего развивается неустойчивость, и происходит переход первого рода. В этом случае необходимо представить соответствующий сценарий. Очевидно, что без ответа на эти вопросы не может быть и речи о понимании перехода Андерсона.

Указанная проблема до предела обостряется существованием тождества Уорда (1.12). Левая часть (1.12) регулярна в точке перехода, тогда как в пределе  $\omega \rightarrow 0$  подынтегральное выражение в правой части расходится в локализованной фазе при всех  $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$  (см. (7.1), (7.4)). Эта сингулярность должна сократиться в результате интегрирования по  $\mathbf{k}'$ , которое затрагивает  $D(\omega, \mathbf{k} + \mathbf{k}')$  и предъявляет жесткие требования к приближению, используемому для вычисления пространственной дисперсии коэффициента диффузии.

Как решаются эти проблемы в существующих теориях? В настоящее время наиболее строгим считается подход к теории локализации, основанный на формализме  $\sigma$ -моделей [70–72], которые получают путем использования в функциональном интеграле перевального приближения по "жестким" направлениям и последующего разложения по градиентам. В "минимальной"  $\sigma$ -модели производится ограничение низшими (вторыми) степенями градиентов, что соответствует пренебрежению пространственной дисперсией коэффициента

диффузии: тем самым указанные проблемы не решаются, а игнорируются. Учет пространственной дисперсии  $D(\omega, \mathbf{q})$ , т.е. введение в лагранжиан  $\sigma$ -модели членов с высшими градиентами, приводит к катастрофе ("high gradients catastrophe"): эти члены начинают аномально возрастать в результате ренормгрупповых преобразований [73, 74]. Подход Вольхардта–Вольфле является в этом смысле более продвинутым, так как приводит к физически прозрачной постановке проблемы. Однако в оригинальном варианте теории [21, 65] пространственная дисперсия  $D(\omega, \mathbf{q})$  не учитывалась, а тождество Уорда грубо нарушалось.

Симметричная теория [19] основана на исследовании спектра квантового оператора столкновений  $\hat{L}$ , представляющего собой симметризованную версию интегрального оператора, возникающего в уравнении Бете–Солпитера (1.11) в результате использования тождества Уорда (1.12)

$$\begin{aligned} & [-\omega + (\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})]\phi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q}) + \\ & + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}_1} U_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q}) [\Delta G_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{q})\phi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{q}) - \Delta G_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})\phi_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}'}(\mathbf{q})] = \\ & = \Delta G_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})N\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Наличие в ядре оператора  $\hat{L}$  диффузионного полюса (см. (7.1)) и пропорциональность  $D(\omega, \mathbf{q}) \sim \omega$  приводят в локализованной фазе к разбиению

$$\hat{L} = \hat{L}_{\text{reg}} + \hat{L}_{\text{sing}} = \hat{L}_{\text{reg}} + \frac{\hat{L}_1}{\omega}, \quad (7.6)$$

где в операторе  $\hat{L}_1$  предполагается взятый предел  $\omega \rightarrow 0$  (члены высшего порядка по  $\omega$  включены в  $\hat{L}_{\text{reg}}$ ). Если собственное значение оператора  $\hat{L}_1$  конечно, то оно соответствует собственному значению порядка  $1/\omega$  оператора  $\hat{L}_{\text{sing}}$  и, мало меняясь при добавлении  $\hat{L}_{\text{reg}} \sim 1$ , порождает собственное значение порядка  $1/\omega$  полного оператора  $\hat{L}$ . Нулевые собственные значения оператора  $\hat{L}_1$  соответствуют нулевым собственным значениям  $\hat{L}_{\text{sing}}$ , которые после добавления  $\hat{L}_{\text{reg}}$  становятся, вообще говоря, порядка 1; однако часть их оказывается  $\sim \omega$  (рис. 12). Последнее следует из того, что одно из собственных значений  $\lambda_0$  оператора  $\hat{L}$  отличается от

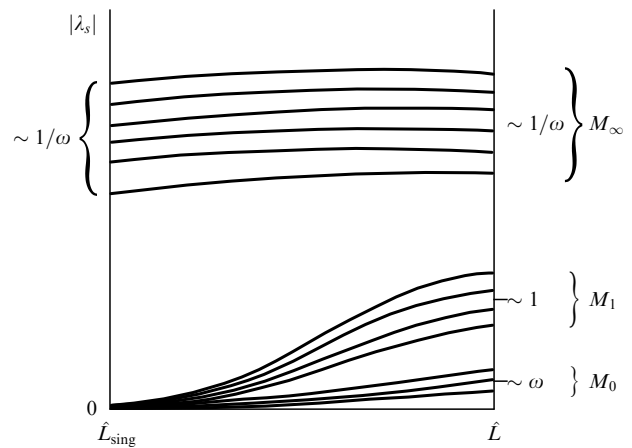


Рис. 12. Эволюция спектра собственных значений  $\lambda_s$  при переходе от  $\hat{L}_{\text{sing}}$  к  $\hat{L}$ , т.е. при "постепенном включении" оператора  $\hat{L}_{\text{reg}}$ .

коэффициента диффузии  $D(\omega, q)$  лишь тривиальным множителем; инвариантность относительно обращения времени приводит к тому, что наряду с  $\lambda_0$  таким свойством обладает еще бесконечное число собственных значений. Из сказанного ясно, что число нулевых собственных значений оператора  $\hat{L}_{\text{sing}}$  бесконечно.

Разбиение (7.6) аналогично разбиению гамильтониана на симметричную и несимметричную части, которое производится при симметричном анализе различных физических задач: оператор  $\hat{L}$  представлен в виде суммы оператора  $\hat{L}_{\text{sing}}$ , обладающего повышенной симметрией (проявляющейся в наличии бесконечного числа нулевых мод) и регулярного оператора  $\hat{L}_{\text{reg}}$  общего вида. Рассмотрим реакцию системы на возмущение  $\delta\hat{L}_{\text{reg}}$ . При этом возникает проблема устойчивости множества  $M_0$  собственных значений  $\lambda_s \sim \omega$  оператора  $\hat{L}$ . Действительно, пусть система находится в глубине локализованной фазы; тогда малое возмущение  $\delta\hat{L}_{\text{reg}}$  не выводит ее из состояния локализации и сохраняет пропорциональность  $\lambda_s \sim \omega$  для  $s \in M_0$ . С другой стороны, если  $\delta\hat{L}_{\text{reg}}$  является возмущением общего вида, то оно имеет ненулевые матричные элементы по собственным векторам оператора  $\hat{L}$  и должно приводить к малым, но не исчезающим при  $\omega \rightarrow 0$  значениям  $\lambda_s$ .

Это противоречие разрешается следующим образом. Оператор  $\hat{L}_{\text{reg}}$  действует в полном гильбертовом пространстве  $\Omega$ , тогда как оператор  $\hat{L}_1$  имеет ненулевые собственные значения  $\sim 1$  только в подпространстве  $\Omega_1$ , являющемся частью  $\Omega$  ( $\Omega = \Omega_0 \oplus \Omega_1$ ). Изменение  $\delta\hat{L}_{\text{reg}}$  приводит к "повороту" подпространства  $\Omega_1$ , что порождает эффективное возмущение  $\delta\hat{L}_{\text{eff}}$  в подпространстве  $\Omega_0$ , которое компенсирует исходное возмущение  $\delta\hat{L}_{\text{reg}}$ : условие такой компенсации приводит к уравнению самосогласования, заменяющему грубое уравнение Вольхардта – Вольфле. Решение уравнения самосогласования ищется в предположении произвольной пространственной дисперсии коэффициента диффузии  $D(\omega, q)$ , но внутренне непротиворечивым оказывается только решение со слабой зависимостью от  $q$ , не влияющей на оценку интеграла в (7.2), которое приводит к результату (7.3) для критических индексов. Таким образом, все основные результаты работы [21] оказываются верными, что удивительно для такой грубой теории.

Утверждение об отсутствии пространственной дисперсии  $D(\omega, q)$  на масштабе  $q \sim \xi^{-1}$  в пределе  $\omega \rightarrow 0$  находится в резком противоречии с ранними работами [75, 76], согласно которым  $D(\omega, q) \sim q^{d-2}$ . Фактически, последний результат может быть опровергнут [77], исходя из соотношения (7.4), являющегося прямым следствием критерия Березинского – Горькова [19]. В последнее время работы [75, 76] критикуются в контексте исследований по мультифрактальности [78], широко использующих гипотезу Чолкера [79], согласно которой в точке перехода  $D(\omega, q) \sim \omega^{n/d} q^{d-2-\eta}$ ; здесь аномальный индекс  $\eta$  заведомо отличен от нуля и связан с эффективной фрактальной размерностью  $D_2$  волновых функций ( $\eta = d - D_2$ ). Утверждение работы [19] об обращении  $D(0, q)$  в нуль одновременно для всех  $q$  согласуется с гипотезой Чолкера, а утверждение об отсутствии пространственной дисперсии указывает на то, что  $\eta = d - 2$ . Последний вывод является, однако, преждевременным: результаты [19] справедливы в пределе  $\omega \rightarrow 0$  и их можно "тянуть" до минимального характерного масштаба  $\omega_0$ , который определяется условием  $\xi \sim L_{\omega_0} \propto \omega_0^{-1/d}$  [78] и в точке перехода обращается в нуль. Равенство  $\eta = d - 2$  можно получить лишь путем сшивки результатов для  $\xi \gg L_{\omega}$  и  $\xi \ll L_{\omega}$ , справедливость которой требует допол-

нительного исследования<sup>17</sup>. В то же время и аргументы против равенства  $\eta = d - 2$  не кажутся нам убедительными. Последние численные расчеты дают  $\eta = 1,2 \pm 0,15$ ,  $\eta = 1,3 \pm 0,2$ ,  $\eta = 1,5 \pm 0,3$  для трех разных методов [78] и не исключают равенства  $\eta = 1$  для  $d = 3$ . Результат  $\eta = 2\epsilon$  в теории  $2 + \epsilon$ , который получают путем сопоставления с работой Вегнера [81], является, на наш взгляд, внутренне противоречивым: при выводе лагранжиана  $\sigma$ -модели пространственной дисперсией пренебрегают, но в другом месте она странным образом возникает. Общие соображения, что фрактальная размерность может принимать любые значения и не обязана быть каким-то "хорошим" числом, также имеют контраргумент: условие того, что точка перехода соответствует неподвижной точке ренормгруппы, накладывает некоторые ограничения на характер мультифрактальности, которые могут выражаться равенством  $\eta = d - 2$ . Наконец, отметим, что во всех указанных работах [75–79] используется связь коррелятора плотности  $S(\omega, q)$  с коэффициентом диффузии

$$S(\omega, q) \sim \frac{D(\omega, q)q^2}{\omega^2 + [D(\omega, q)q^2]^2}, \quad (7.7)$$

справедливая лишь в предположении действительности  $D(\omega, q)$ , тогда как общее соотношение имеет вид

$$S(\omega, q) \sim \frac{1}{\omega} \text{Im} \frac{D(\omega, q)q^2}{-i\omega + D(\omega, q)q^2} \quad (7.8)$$

(см. формулу (31) работы [19]). В низшем порядке по  $\omega$  коэффициент диффузии является действительным в металлической фазе и чисто мнимым в локализованной; вблизи перехода происходит сложная перестройка его структуры, о которой в указанных работах даже не упоминается.

Теория [19] является строгой в предположении, что единственными сингулярностями являются диффузионные полюса, существование которых доказывается из общих принципов. Сингулярности другого типа могут существовать в специально сконструированных моделях, но, не поддерживаясь симметрией, должны отсутствовать в общем случае. Такая мотивация характерна для теории среднего поля и может оказаться неверной ввиду наличия скрытых элементов симметрии. Однако существуют аргументы в пользу того, что указанная теория представляет собой нечто большее, чем просто теорию среднего поля.

Действительно, наличие скрытых элементов симметрии характерно лишь для самой критической точки; поэтому в типичном случае теория среднего поля не дает правильного критического поведения, но правильно описывает *изменение симметрии*. Согласно предлагаемому сценарию, переход Андерсона по характеру изменения симметрии оказывается аналогичным точке Кюри для изотропного  $n$ -компонентного ферромагнетика в пределе  $n \rightarrow \infty$ : так же как в ферромагнетике изменение магнитного поля приводит к повороту вектора намагниченности, так в рассматриваемом случае

<sup>17</sup> Нетривиальный характер этой сшивки определяется уже комплексностью коэффициента диффузии, но имеются и более определенные указания [80]. Соответственно, результат для  $\tau \lesssim \omega^{1/(2\nu+1)}$  в формуле (116а) работы [19] носит несколько условный характер, так как члены более высокого порядка по  $\omega$ , малые при  $\tau \neq 0$ , в самой точке перехода могут стать существенными.

изменение  $\hat{L}_{\text{рег}}$  приводит к "повороту" бесконечномерного подпространства  $\Omega_1$ . Модель ферромагнетика с бесконечным числом компонент является основой  $1/n$ -разложения [9], ее критические индексы известны точно и оказываются в полном соответствии с результатами (7.3) прямого анализа. Это является аргументом в пользу полноты выявления симметрии критической точки и точного определения индексов. Изотропия эквивалентного ферромагнетика является симметрией, обеспечивающей обращение  $D(0, \mathbf{q})$  в нуль одновременно для всех  $\mathbf{q}$ .

Другой аргумент состоит в том, что значения индексов (7.3) согласуются со всеми достоверными результатами модельных исследований (на этом основании гипотеза о том, что индексы (7.3) являются точными, уже высказывалась в работе [69]):

а) для  $2 < d < 4$  между индексами  $s$  и  $\nu$  справедливо соотношение Вегнера  $s = \nu(d - 2)$ , следующее из существования однопараметрического скейлинга [67], а для  $d = 2 + \epsilon$  справедливы результаты

$$\nu = \frac{1}{\epsilon}, \quad s = 1 \quad (\epsilon \rightarrow 0), \quad (7.9)$$

вытекающие из регулярного разложения для функции Гелл-Манна–Лоу [67]

$$\beta_{\text{GL}}(g) = \epsilon + \frac{A}{g} + \frac{B}{g^2} + \dots \quad (7.10)$$

с  $A < 0$ . Член  $A/g$  в (7.10) определяет при  $d = 2$  логарифмические поправки к проводимости, и его существование (с правильным знаком  $A$ ) может быть проконтролировано из диаграммной техники. В "минимальной"  $\sigma$ -модели две первые поправки по  $\epsilon$  к (7.9) обращаются в нуль, а полученная Вегнером [82] поправка третьего порядка сильно ухудшает согласие с численными расчетами и подвергается сомнению самим автором; по видимому, соответствие нуль-компонентной  $\sigma$ -модели и исходной неупорядоченной системы верно лишь в низших порядках по  $\epsilon$ . Так или иначе, проблема высших градиентов делает модификацию  $\sigma$ -моделей неизбежной; однако результат (7.9) останется неизменным при любых модификациях, не затрагивающих общую философию однопараметрического скейлинга;

б) результат (7.3) выделяет размерности пространства  $d_{c1} = 2$  и  $d_{c2} = 4$ , которые из независимых соображений являются нижней и верхней критическими размерностями;

в) весь опыт теории фазовых переходов показывает, что для  $d > d_{c2}$  критические индексы не зависят от  $d$ , что имеет место в (7.3);

г) при  $d = \infty$  значение индекса  $\nu = 1/2$  согласуется с результатами для решетки Бете [83–85]; для индекса  $s$  имеется два конкурирующих результата  $s = \infty$  [85] и  $s = 1$  [86], один из которых согласуется с (7.3);

д) качественное поведение  $\nu$  как функции  $d$  подтверждается оценками из иерархических моделей [18];

е) значение индекса  $\nu = 1$  для  $d = 3$  удовлетворительно согласуется с результатами ранних численных расчетов ( $\nu = 1,2 \pm 0,3$  [87],  $\nu = 0,9 \pm 0,3$ ,  $\nu = 1,4 \pm 0,2$  [88]), но в последнее время наметилась тенденция к более высоким значениям:  $\nu = 1,35 \pm 0,15$  [89],  $\nu = 1,54 \pm 0,08$  [90],  $\nu = 1,45 \pm 0,08$  [91]. На наш взгляд, принимать эту тенденцию всерьез было бы преждевременно. Повышение точности в последних работах достигнуто за счет усложнения обработки, тогда как "сырые" данные по признанию авторов работы [89] остаются на уровне 1990 г. [88] и по оценкам самих

авторов в ближайшее время существенно не изменятся. Приводимая точность не отражает систематической ошибки, которая в системах небольшого размера  $L$  с  $L/a_0 \leq 13$  [89, 90] заведомо велика. Те же данные при грубом учете поправок к скейлингу удается согласовать со значением  $\nu = 1$  [92, 93]. Кроме того, используемый в большинстве работ [87–90] метод оценки корреляционной длины  $\xi$  по показателю Ляпунова для квазиодномерной системы размера  $M \times M \times L$  с  $L \gg M$  не имеет под собой серьезной теоретической основы. На наш взгляд, все точки, соответствующие условию  $\xi \gtrsim M$ , должны быть исключены, тогда как практически они никак не дискриминируются. На общем фоне заметно выделяется работа [91], основанная на прямой диагонализации гамильтониана и использующая системы сравнительно большого размера  $L^3$  с  $L/a_0 = 28$ ; однако и в этой работе при обработке используются точки, соответствующие  $\xi \gtrsim L$ . Наконец, отметим, что полученная в работе [35] эмпирическая формула для зависимости индекса  $\nu$  от  $d$  противоречит теоретическому результату  $\nu = 1/\epsilon$  при  $\epsilon = d - 2 \rightarrow 0$ , однозначно следующему из однопараметрического скейлинга (на котором основана вся обработка в [35]), и результату  $d_{c2} = 4$ , который, как нам представляется, вне всяких сомнений обоснован в настоящем обзоре.

Таким образом, теория [19] может претендовать на точное определение критических индексов. Для завершения теории следует доказать отсутствие сингулярностей, отличных от диффузионных полюсов. Возможность математического доказательства в общем виде, на наш взгляд, проблематична, так как всегда можно сконструировать модель со "встроенной" сингулярностью. Поэтому естественный путь состоит в проверке *общей структуры* теории [19] в рамках некоторой физически разумной модели. Такая проверка для  $(4 - \epsilon)$ -мерной гауссовой модели (1.1) вполне реальна и в случае положительного результата будет означать не просто построение  $\epsilon$ -разложения, но полное решение проблемы перехода Андерсона.

**Благодарности.** Автор признателен М.В. Садовскому, прочитавшему предварительный вариант работы и сделавшему существенные замечания. Мне приятно выразить свою благодарность В.Е. Кравцову и М.В. Фейгельману за стимулирующие дискуссии, а также участникам семинаров в Институте физических проблем им. П.Л. Капицы и в Физическом институте им. П.Н. Лебедева за интерес к работе и многочисленные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант 96-580) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-02-19527).

## Список литературы

1. Anderson P W *Phys. Rev.* **109** 1492 (1958)
2. Мотт Н Ф, Дэвис Э *Электронные процессы в некристаллических веществах* (М.: Мир, 1974)
3. Thouless D J *Phys. Rep.* **13** 93 (1974)
4. Эфрос А Л *УФН* **126** 41 (1978)
5. Садовский М В *УФН* **133** 223 (1981)
6. Lee P A, Ramakrishnan T V *Rev. Mod. Phys.* **57** 287 (1985)
7. Belitz D, Kirkpatrick T R *Rev. Mod. Phys.* **66** 261 (1994)
8. Лифшиц И М *УФН* **83** 617 (1964)
9. Ма Ш *Современная теория критических явлений* (М.: Мир, 1980)
10. Вильсон К, Когут Дж *Ренормализационная группа и  $\epsilon$ -разложение* (М.: Мир, 1975)
11. Паташинский А З, Покровский В Л *Флуктуационная теория фазовых переходов* 2-е изд. (М.: Наука, 1982)

12. Ziman J M *J. Phys. C* **2** 1230 (1969)
13. Edwards S F *Philos. Mag.* **3** 1020 (1958)
14. Абрикосов А А, Горьков Л П, Дзялошинский И Е *Методы квантовой теории поля в статистической физике* (М.: Физматгиз, 1962)
15. Lloyd P J *J. Phys. C* **2** 1717 (1969)
16. Economou E N, Cohen M H *Phys. Rev. B* **5** 2931 (1972)
17. Aharony A, Imry Y *J. Phys. C* **10** L487 (1977)
18. Суслов И М *ЖЭТФ* **92** 1433 (1987)
19. Суслов И М *ЖЭТФ* **108** 1686 (1995)
20. Sadvovskii M V *Sov. Sci. Rev. A. Phys.* **7** 1 (1986)
21. Vollhardt D, Wölfle P *Phys. Rev. B* **22** 4666 (1980)
22. Thouless D J *J. Phys. C* **8** 1803 (1975)
23. Садовский М В *ЖЭТФ* **70** 1936 (1976)
24. Wegner F J Z. *Phys. B* **25** 327 (1976)
25. Nitzan A, Freed K F, Cohen M H *Phys. Rev. B* **15** 4476 (1977)
26. Люксотов И Ф, Покровский В Л, Хмельницкий Д Е *ЖЭТФ* **69** 1817 (1975)
27. Садовский М В *ФТТ* **19** 1334 (1977)
28. Wegner F J. *Phys. C* **13** L45 (1980)
29. Thouless D J *J. Phys. C* **9** L603 (1976)
30. Straley J P *Phys. Rev. B* **28** 5393 (1983)
31. Lukes T J. *Phys. C* **12** L797 (1979)
32. Harris A V, Lubensky T C *Phys. Rev. B* **23** 2640 (1981)
33. Ефетов К Б *ЖЭТФ* **88** 1032 (1985)
34. Mirlin A D, Fyodorov Y V *Phys. Rev. Lett.* **72** 526 (1994)
35. Schreiber M, Grussbach H *Phys. Rev. Lett.* **76** 1687 (1996)
36. Суслов И М *ЖЭТФ* **102** 1951 (1992)
37. Суслов И М *ЖЭТФ* **105** 560 (1994)
38. Суслов И М *ЖЭТФ* **111** 220 (1997)
39. Суслов И М *ЖЭТФ* **111** 1896 (1997)
40. Лифшиц И М, Гредескул С А, Пастур Л А *Введение в теорию неупорядоченных систем* (М.: Наука, 1982)
41. Cardy J L J. *Phys. C* **11** L321 (1978)
42. Садовский М В *ФТТ* **21** 743 (1979)
43. Brezin E, Parisi G J. *Phys. C* **13** L307 (1980)
44. Makhanov V G *Phys. Lett. A* **61** 431 (1977)
45. Боголюбов Н Н, Ширков Д В *Введение в теорию квантованных полей* (М.: Наука, 1976)
46. Brezin E, Le Guillou J C, Zinn-Justin J, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* Vol. VI (Eds C Domb, M S Green) (New York: Academic, 1976)
47. Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1980)
48. Ландау Л Д, Абрикосов А А, Халатников И М *ДАН СССР* **95** 497, 773, 1177 (1954)
49. Боголюбов Н Н, Ширков Д В *Квантовые поля* (М.: Физматлит, 1993)
50. Миндал А Б *Качественные методы в квантовой теории* (М.: Наука, 1975)
51. Ларкин А И, Хмельницкий Д Е *ЖЭТФ* **56** 2087 (1969)
52. Гинзбург С Л *ЖЭТФ* **66** 647 (1974)
53. Дятлов И Т, Судаков В В, Тер-Мартirosян К А *ЖЭТФ* **32** 767 (1957)
54. Судаков В В *ДАН СССР* **111** 338 (1956)
55. Поляков А М *ЖЭТФ* **57** 271 (1969)
56. Tsuneto T, Abrahams E *Phys. Rev. Lett.* **30** 217 (1973)
57. Кудрявцев Л Д *Математический анализ* Т. 1 (М.: Высшая школа, 1973)
58. Липатов Л М *ЖЭТФ* **72** 411 (1977)
59. Харди Г *Расходящиеся ряды* (М.: ИИЛ, 1951)
60. Ефетов К Б *ЖЭТФ* **92** 638 (1987)
61. Brezin E, Le Guillou J C, Zinn-Justin J *Phys. Rev. D* **15** 1544 (1977)
62. Brezin E, Parisi G J. *Stat. Phys.* **19** 269 (1978)
63. Halperin B I *Phys. Rev.* **139** A104 (1965)
64. Гельфонд А О *Исчисление конечных разностей* (М.: Наука, 1967)
65. Vollhardt D, Wölfle P *Phys. Rev. Lett.* **48** 699 (1982)
66. Vollhardt D, Wölfle P, in *Electronic Phase Transitions* (Modern Problems in Condensed Matter Sciences Vol. 32, Eds W Hanke, Yu V Kopaev) (Amsterdam: North-Holland, 1992)
67. Abrahams E et al. *Phys. Rev. Lett.* **42** 673 (1979)
68. Горьков Л П, Ларкин А И, Хмельницкий Д Е *Письма в ЖЭТФ* **30** 248 (1979)
69. Kunz H, Souillard B J. *Phys. Lett.* **44** L503 (1983)
70. Schäfer L, Wegner F Z. *Phys. B* **38** 113 (1980)
71. Ефетов К Б, Ларкин А И, Хмельницкий Д Е *ЖЭТФ* **79** 1120 (1980)
72. Efetov K B *Adv. Phys.* **32** 53 (1983)
73. Кравцов В Е, Лернер И В, Юдсон В И *ЖЭТФ* **94** 255 (1988)
74. Wegner F Z. *Phys. B* **78** 33 (1990)
75. Imry Y, Gefen Y, Bergman D J *Phys. Rev. B* **26** 3436 (1982)
76. Abrahams E, Lee P A *Phys. Rev. B* **33** 683 (1986)
77. Садовский М В *СФХТ* **8** 337 (1995)
78. Brandes T, Huckestein B, Schweitzer L *Ann. Phys.* **5** 633 (1996)
79. Chalker J T *Physica A* **167** 253 (1990)
80. Грошев А Г, Новокшенов С Г *ЖЭТФ* **111** 1787 (1997)
81. Wegner F Z. *Phys. B* **36** 209 (1980)
82. Wegner F *Nucl. Phys. B* **316** 663 (1989)
83. Kunz H, Souillard R J. *Phys. Lett.* **44** L411 (1983)
84. Ефетов К Б *ЖЭТФ* **93** 1125 (1987)
85. Ефетов К Б *ЖЭТФ* **94** 357 (1988)
86. Shapiro B *Phys. Rev. Lett.* **50** 747 (1983)
87. MacKinnon A, Kramer B *Phys. Rev. Lett.* **47** 1546 (1981)
88. Kramer B et al. *Physica A* **167** 163 (1990)
89. Hofstetter E, Schreiber M *Europhys. Lett.* **21** 933 (1993)
90. MacKinnon A J. *Phys.: Condens. Matter* **6** 2511 (1994)
91. Zharekshv I Kh, Kramer B *Phys. Rev. B* **51** 17239 (1995)
92. Economou E N, Soukoulis C M, Zdzetis A D *Phys. Rev. B* **31** 6483 (1985)
93. Kroha H *Physica A* **167** 231 (1990)

### Development of $(4 - \epsilon)$ -dimensional theory for the density of states of a disordered system near the Anderson transition

I.M. Suslov

*P.L. Kapitza Institute for Physical Problems, Russian Academy of Sciences  
ul. Kosygina 2, 117334 Moscow, Russia  
Tel. (7-095) 137-7985. Fax (7-095) 938-20 30  
E-mail: suslov@kapitza.ras.ru*

The calculation of the density of states for the Schrödinger equation with a Gaussian random potential is equivalent to the problem of a second-order transition with a 'wrong' sign of the coefficient of the quartic term in the Ginzburg – Landau Hamiltonian. The special role of the dimension  $d = 4$  for such Hamiltonian can be seen from different viewpoints but fundamentally is determined by the renormalizability of the theory. Construction of  $\epsilon$ -expansion in direct analogy with the phase transitions theory gives rise to a problem of a 'spurious' pole. To solve this problem, the proper treatment of the factorial divergency of the perturbation series is necessary. Simplifications arising in high dimensions can be used for development of  $(4 - \epsilon)$ -dimensional theory, but it requires successive consideration of four types of theories: nonrenormalizable theory for  $d > 4$ , nonrenormalizable and renormalizable theories in the logarithmic situation ( $d = 4$ ) and super-renormalizable theory for  $d < 4$ . Approximation is found for each type of theory giving the asymptotically exact results. In  $(4 - \epsilon)$ -dimensional theory the terms of the leading order in  $1/\epsilon$  are retained for  $N \sim 1$  ( $N$  is an order of the perturbation theory) while all degrees of  $1/\epsilon$  are essential for large  $N$  in view of the fast growth of their coefficients. The latter are calculated in the leading order in  $N$  from the Callan – Symanzik equation with results of Lipatov method used as boundary conditions. The qualitative effect is the same in all four cases and consists in shifting of the phase transition point in the complex plane. This results in elimination of the 'spurious' pole and in regularity of the density of states for all energies. Discussion is given of calculation of high orders of perturbation theory and a perspective of  $\epsilon$ -expansion in the problem of conductivity near the Anderson transition.