

Институт Физических проблем им. П.Л. Капицы РАН

на правах рукописи

УДК 538.941

СУРОВЦЕВ ЕВГЕНИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

Стационарные и нестационарные возмущения
сверхтекучего ${}^3\text{He}$

Специальность 01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., профессор Фомин И.А.

Москва

2009

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Параметрическая неустойчивость когерентной прецессии в сверхтекучем $^3\text{He} - \text{B}$	13
1.1 Катастрофическая релаксация. Эксперимент.	13
1.2 Теоретические модели	16
1.3 Уравнения спиновой динамики	17
1.4 Спиновые волны на фоне прецессии	20
1.5 Параметрическое возбуждение спиновых волн однородной прецессией	24
1.6 Порог неустойчивости	32
1.7 Сравнение объемного и поверхностного вкладов в инкремент неустойчивости	33
1.8 Сравнение с экспериментом	36
1.9 Выводы	40
Глава 2. Влияние деформированного аэрогеля на параметр порядка сверхтекучего ^3He. Модельные вычисления.	42
2.1 Постановка задачи	42
2.2 Модель аэрогеля.	44
2.3 Вычисление возмущения от одного цилиндра	46
2.4 Усреднение по ансамблю цилиндров	50
2.5 Вычисление корреляционной функции	52
2.6 Результаты	54

Глава 3. Влияние одноосно-деформированного аэрогеля на ориентацию параметра порядка сверхтекучего ^3He. Эффект корреляций.	57
3.1 Эффект корреляций	57
3.2 Уравнение Гинзбурга-Ландау	57
3.3 Функция Грина	60
3.4 Ориентация В-подобной фазы	69
3.5 Ориентация А-подобной фазы	71
3.6 Обсуждение результатов	72
Заключение	75
Литература	76

Введение

Благодаря тому, что ядра ${}^3\text{He}$ обладают спином $1/2$, одним из основных инструментов изучения ${}^3\text{He}$ является метод ядерного магнитного резонанса (ЯМР). Применение импульсного метода ЯМР основано на исследовании однородной прецессии спина в постоянном магнитном поле. Прецессирующий спин наводит в приемных катушках регистрируемый сигнал индукции (рис.1). В сверхтекучем ${}^3\text{He}$ прецессия спина имеет существенную особенность. Одновременно со спином в прецессии участвует параметр порядка. В ${}^3\text{He}$ реализуется p -спаривание с орбитальным моментом равным 1, поэтому параметром порядка является комплексная матрица 3×3 , в дальнейшем $A_{\mu j}$. Структуру параметра порядка удобно описывать набором векторов $d_{\mu}(\hat{k}) = A_{\mu j} \hat{k}_j$ в спиновом пространстве, где \hat{k}_j - единичный вектор в направлении волнового вектора (рис.2). Совместная прецессия спина и параметра порядка описывается уравнениями Леггетта [1]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}} &= g\mathbf{S} \times \mathbf{H} + \mathbf{N}_D, \\ \dot{\mathbf{d}}(\hat{k}) &= \left(\frac{g^2\mathbf{S}}{\chi} - g\mathbf{H} \right) \times \mathbf{d}(\hat{k}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где \mathbf{H} - внешнее магнитное поле, \mathbf{S} - вектор спина, g - гиромагнитное отношение для ядер ${}^3\text{He}$, χ - магнитная восприимчивость, которая для простоты

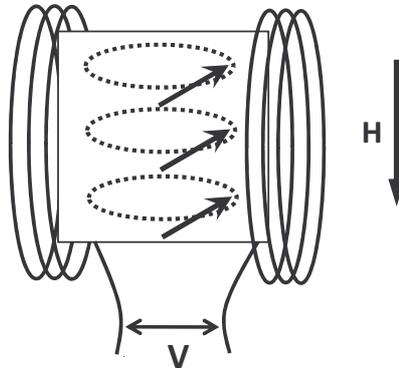


Рис. 1.

Схема импульсного ЯМР. Прецессирующий спин наводит в приемных катушках регистрируемый сигнал индукции

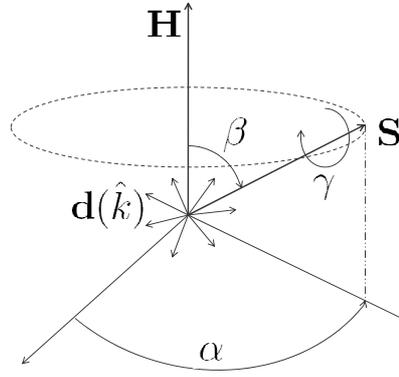


Рис. 2.

Совместная прецессия спина и параметра порядка. Здесь β - угол отклонения намагниченности от направления магнитного поля, α - фаза прецессии в покоящейся системе координат. В системе координат, вращающейся с ларморовской частотой, прецессия параметра порядка (набора векторов $\mathbf{d}(\hat{\mathbf{k}})$) происходит вокруг направления спина

считается изотропной, N_D - момент дипольных сил. Первое уравнение в (1.1) описывает прецессию спина в магнитном поле. Влияние параметра порядка на движение спина происходит за счет момента дипольных сил. Соответствующая энергия спин-орбитального взаимодействия возникает в результате взаимодействия магнитных дипольных моментов ядер ${}^3\text{He}$ и зависит от структуры параметра порядка:

$$U_D \sim \int |\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}(\mathbf{n})|^2 \frac{d\Theta_{\mathbf{n}}}{4\pi}. \quad (1.2)$$

Отношение дипольной энергии к зеемановской энергии задается параметром Ω^2/ω_L^2 , где Ω - частота продольного резонанса, $\omega_L = -gH$ - ларморовская частота. Естественным образом возникают две асимптотические области: $\Omega^2/\omega_L^2 \gg 1$ и $\Omega^2/\omega_L^2 \ll 1$. Для случая $\Omega^2/\omega_L^2 \gg 1$ движение намагниченности в основном определяется моментом дипольных сил и существенно зависит от конкретного вида U_D . В описываемой ниже теории будет рассматриваться случай больших магнитных полей, то есть $\Omega^2/\omega_L^2 \ll 1$. В этом случае периодические решения представляют собой ларморовскую прецессию, возмущенную действием дипольных сил. Отметим, что именно благодаря второму члену в правой части первого уравнения возникает возможность идентификации сверхтекучих фаз ${}^3\text{He}$ и раз-

личных текстур параметра порядка, возникающих из-за влияния стенок.

В чистом ${}^3\text{He}$ экспериментально подтверждено существование двух сверхтекучих фаз: A -фазы и B -фазы. Параметром порядка A -фазы является матрица

$$A_{\mu j} = \frac{\Delta}{\sqrt{2}} d_{\mu} (m_j + i n_j), \quad (1.3)$$

Δ – амплитуда параметра порядка, d_{μ} – единичный вектор в спиновом пространстве, m_j, n_j – взаимно-ортогональные единичные вектора в орбитальном пространстве. Параметр порядка B -фазы задается произвольной матрицей вращения $R(\mathbf{n}, \theta)$:

$$A_{\mu j} = e^{i\varphi} \frac{\Delta}{\sqrt{3}} R(\mathbf{n}, \theta), \quad (1.4)$$

где \mathbf{n} – направление вращения, θ – угол вращения, φ – фаза параметра порядка. Фазовая диаграмма для чистого ${}^3\text{He}$ показана на рис.3.

В первой главе диссертации будет рассматриваться прецессия спина в B -фазе ${}^3\text{He}$, которая имеет существенные особенности. При температурах $T \geq 0.4T_c$, где T_c – температура перехода ${}^3\text{He}$ в сверхтекучее состояние, сигнал индукции, а стало быть и однородная прецессия, существуют anomalously долго – во много раз дольше, чем время расфазировки спина из-за остаточной неоднородности магнитного поля. При $T \sim 0.4T_c$ происходит переход к другому режиму, когда сигнал индукции, наоборот, исчезает очень быстро. Этот быстрый распад пре-

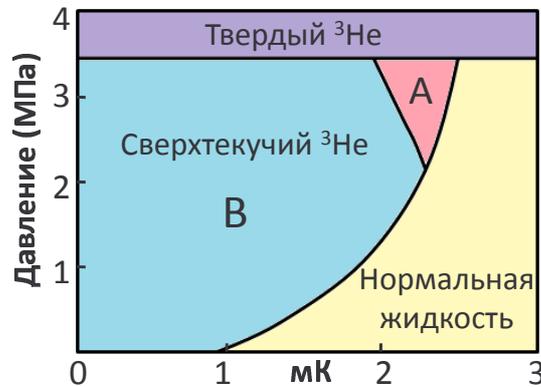


Рис. 3.

Схематическое представление фазовой диаграммы ${}^3\text{He}$

цессии впервые наблюдался в работе [2] и был назван *катастрофической релаксацией*. Таким образом, катастрофическая релаксация ограничивает возможность применения импульсного ЯМР в ${}^3\text{He}$ при самых низких температурах. В то время как аномально долгий сигнал индукции уже давно количественно объяснен образованием двухдоменной когерентно прецессирующей структуры, для катастрофической релаксации до недавнего времени отсутствовало даже качественное объяснение.

В настоящей работе предлагается объяснение катастрофической релаксации основанное на неустойчивости однородной прецессии спина по отношению к распаду на параметрически возбуждаемые спиновые волны с противоположными волновыми векторами [26, 27] (суловская неустойчивость [4]). Особенностью неустойчивости в ${}^3\text{He-V}$ является то, что речь идет о свободной прецессии намагниченности с большими начальными углами отклонения $\beta \sim 100^\circ$. Под спиновыми волнами в этом случае следует понимать малые пространственные возмущения прецессии.

Быстрый распад прецессии наблюдался также в *uudd*-фазе твердого ${}^3\text{He}$ [5] и тоже был объяснен возникновением суловской неустойчивости. Следует заметить, однако, что количественная интерпретация результатов, относящихся к области неустойчивости прецессии, в цитируемой работе, основана на модификации теории [6], построенной для непрерывного ЯМР и потому применима лишь при малых углах отклонения спина от направления магнитного поля. В нашем анализе это предположение не используется и он применим при произвольных углах между спином и магнитным полем. Исследованию устойчивости когерентной прецессии при низких температурах будет посвящена первая глава данной работы.

Вторая часть диссертации посвящена вопросу о влиянии немагнитных примесей на сверхтекучесть с нетривиальным куперовским спариванием, который вызывает в настоящее время большой интерес. Для случая сверхтекучего ${}^3\text{He}$ ис-

следование данного вопроса наталкивается на существенные трудности. Сверхтекучий ${}^3\text{He}$ представляет из себя идеально чистую систему. Любой объект помещенный в сверхтекучий ${}^3\text{He}$ увеличивает энергию системы. Это приводит к тому, что все несвязанные между собой примеси выталкиваются из ${}^3\text{He}$ и "вымораживаются" на стенках экспериментальной ячейки. Чтобы преодолеть возникающие трудности, было предложено в качестве связанных между собой примесей в ${}^3\text{He}$ использовать аэрогель. Аэрогель представляет из себя прозрачный, с очень маленькой плотностью материал, состоящий из агрегатов частиц двуокиси кремния (SiO_2). Принято описывать аэрогель как жесткий каркас из нитей SiO_2 с средним диаметром 3 – 5 нм (рис.4). Занимаемый самим каркасом объем, гораздо меньше полного объема аэрогеля. Для используемых в экспериментах аэрогелей объем пор, т.е. пустого пространства внутри аэрогеля, составляет 97% – 99% от полного объема. Эта величина называется пористостью аэрогеля и в дальнейшем будет обозначаться буквой P . Особый интерес представляет микроструктура аэрогеля. Так как частицы SiO_2 связаны между

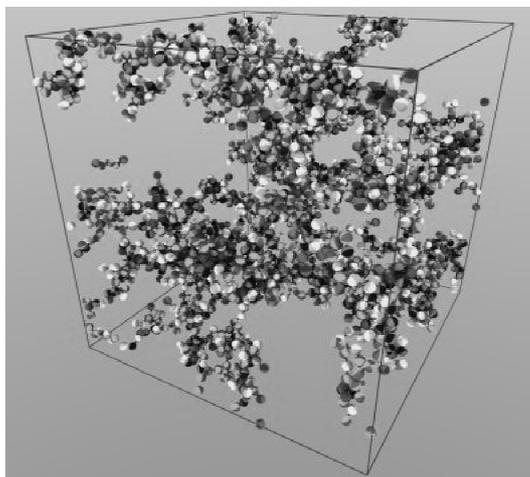


Рис. 4.

Компьютерная симуляция микроструктуры аэрогеля [7]. Простейшая модель аэрогеля, когда он состоит из одинаковых сферических частиц диаметром 3 нм. Частицы соединены в цепочки которые пространственно скоррелированы на расстоянии 30 нм. Вычисленная средняя геометрическая длина свободного пробега равна 200 нм

собой в нити и образуют жесткий каркас, то на некотором расстоянии между частицами существуют корреляции. Расстояние на котором эти корреляции спадают называется радиусом корреляции аэрогеля, далее R . Для используемых аэрогелей это расстояние может быть порядка $R \sim 10 - 100$ нм. На расстояниях меньших радиуса корреляций аэрогель, по сути, неоднороден, а на больших расстояниях его можно считать однородным. Благодаря тому, что образование геля ограничено процессами диффузии частиц SiO_2 в растворе, неоднородность аэрогеля на длине корреляций описывается фрактальным распределением частиц SiO_2 , т.е. частицы аэрогеля на этом расстоянии образуют фрактальный кластер. При фрактальном распределении частиц парная функция корреляций спадает степенным образом, и как следствие средняя массовая плотность вещества в сфере радиуса r спадает по закону:

$$\rho(r) \sim \left(\frac{1}{r}\right)^{3-D}, \quad (1.5)$$

где D – фрактальная размерность кластера. Для используемых в экспериментах с 3He аэрогелей фрактальная размерность лежит в интервале $1.6 \div 1.8$. Ещё одной характеристикой аэрогеля является средняя геометрическая длина свободного пробега, которая соответствует длине свободного пробега квазичастиц 3He при упругом рассеянии на нитях аэрогеля. Важно отметить, что средняя геометрическая длина пробега зависит не только от плотности аэрогеля и радиуса образующих его частиц, но и от фрактальной размерности. Параметр $3 - D$ характеризует открытость фрактального кластера. Если $3 - D > 1$, то кластер является открытым объектом, т.е. произвольная прямая линия насквозь проходит через объект без пересечений с ним. Используемые аэрогели обладают указанным свойством. Для 98,2% аэрогеля длина свободного пробега равняется примерно $l_{tr} = 140$ нм, что больше радиуса корреляций аэрогеля.

Для исследования свойств сверхтекучего 3He в аэрогеле важным является сравнение характерных длин, описывающих аэрогель, и длины когерентности

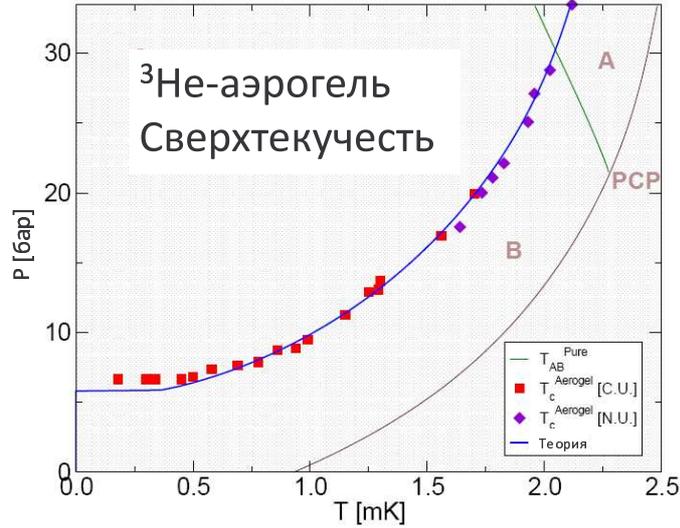


Рис. 5.

Подавление температуры сверхтекучего перехода в зависимости от давления. Экспериментальные данные: [C.U.] - [12], [N.U.] - [11]. Теоретическая кривая - [10]

сверхтекучего ${}^3\text{He}$ - $\xi_0 = \hbar v_F / 2\pi T_c$. Длина когерентности ξ_0 зависит от давления и меняется от 16 нм при высоких давлениях вблизи кривой плавления до 77 нм при нулевом давлении. Таким образом, длина когерентности всегда заведомо больше радиуса частиц, образующих аэрогель, и порядка радиуса корреляций аэрогеля. При исследовании сверхтекучести последнее отношение является наиболее важным.

Одной из главных особенностей сверхтекучести ${}^3\text{He}$ в аэрогеле является понижение температуры сверхтекучего перехода (рис.5). Самой простой моделью для описания понижения температуры перехода является модель однородного рассеяния (МОР), которая является обобщением теории сверхпроводящих сплавов Абрикосова-Горькова [8] на случай p -спаривания. В данной модели считается, что в объеме ξ_0^3 (объем куперовской пары) находится большое число примесей и распределение примесей однородно, т.е. флуктуации числа частиц в объеме не учитываются. За счет рассеяния квазичастиц на примесях, каждая из примесей создает маленький по сравнению с энергией конденсации возмущающий потенциал. Рассматривая все примеси независимыми друг от друга, можно про-

известии усреднение суммарного возмущающего потенциала примесей по объему, что дает средний сдвиг температуры перехода. В этом случае в теорию входит лишь один параметр ξ_0/l_{tr} , ($\xi_0/l_{tr} \ll 1$), т.е. корреляции в расположении частиц не учитываются. Очевидно, что сделанные предположения выполняются для аэрогеля, только если длина когерентности много больше радиуса корреляций аэрогеля, т.е. область применения данной теории лежит в области низких давлений. Для высоких давлений распределение примесей в объеме ξ_0^3 будет неоднородным и необходимо учитывать корреляции в расположении частиц, чтобы описать данную неоднородность. Учет влияния корреляций в расположении частиц, образующих аэрогель, на температуру сверхпроводящего перехода был сделан в работе [9]. Полученная в указанной работе формула для понижения температуры перехода описывает переход между двумя предельными случаями $R \gg \xi_0$ (высокие давления) и $R \ll \xi_0$ (низкие давления). Ранее такая же формула была эвристически предложена в работе [10], в которой авторы показали ее полное соответствие экспериментальным данным (рис.5).

В слабых магнитных полях наблюдаются две сверхтекучие фазы ${}^3\text{He}$ в аэрогеле, которые были названы *A*-подобная и *B*-подобная фазы. Было установлено, что *B*-подобная фаза аналогична "обычной" объемной фазе ${}^3\text{He}$, т.е. ее параметр порядка соответствует параметру порядка объемной *B*-фазы. Основным кандидатом для *A*-подобной фазы в настоящее время является разупорядоченное состояние типа Имри-Ма состояния для параметра порядка АБМ-фазы. Было показано, что ЯМР свойства такого состояния отличаются от свойств объемной АБМ-фазы. Однако экспериментально было обнаружено, что для некоторых образцов аэрогеля ЯМР свойства *A*-подобной фазы не соответствуют Имри-Ма состоянию. Дальнейшие исследования показали, что указанные образцы аэрогеля были одноосно сжаты на 1 – 2% и в этом случае *A*-подобная фаза ведет себя как объемная АБМ-фаза с определенной ориентацией параметра порядка [13]. Таким образом возник интересный вопрос о влиянии глобальной

анизотропии аэрогеля на выбор состояния сверхтекучего ^3He в аэрогеле и на ориентацию параметра порядка.

Во второй и третьей главах диссертации будет изучаться вопрос о вызванном анизотропным аэрогелем расщеплении температуры сверхпроводящего перехода. Это означает, что различные компоненты параметра порядка, отличающиеся орбитальными индексами, обладают различной энергией в деформированном аэрогеле. Вызванное одноосно-деформированным аэрогелем маленькое по отношению к общему сдвигу расщепление температуры перехода в итоге приводит к возникновению ориентационной энергии, которая и вычисляется. Во второй главе данный вопрос исследован в рамках МОР. Однако неявно учет корреляций в расположении частиц все-таки произведен. Это выражается в том, что аэрогель считается состоящим из однородно распределенных в пространстве цилиндров и поэтому рассеяние отдельных элементов аэрогеля является анизотропным. В работе [14] было показано, что глобальная анизотропия аэрогеля может приводить к подавлению поперечных флуктуаций параметра порядка (под поперечными флуктуациями здесь подразумеваются флуктуации возникающие из-за поворота параметра порядка). В рамках указанной выше модели во второй главе диссертации оценен параметр, равный отношению амплитуды поперечных флуктуаций параметра порядка к амплитуде среднего параметра порядка. Если указанный параметр порядка 1, то описание в рамках теории Гинзбурга-Ландау становится неприменимым. В этом случае флуктуации возмущающего поля аэрогеля могут привести к возникновению разупорядоченного состояния. В третьей главе рассмотрена другая модель аэрогеля, с изотропным рассеянием частиц образующим аэрогель, явным образом учитывающая корреляции между частицами, формирующими аэрогель. Данная модель является обобщением модели предложенной в работе [9] на случай анизотропного аэрогеля. Вторым отправным пунктом третьей главы является недавнее экспериментальное изучение введения глобальной анизотропии в аэрогель, описанное в работе [15]. Най-

денное авторами соотношение, описывающее изменение в корреляциях частиц при одноосном сжатии аэрогеля, будет непосредственно использоваться. В рамках данной модели найдена ориентационная энергия B -подобной и A -подобной фаз. Для B -подобной фазы найдена минимальная деформация приводящая к ориентации параметра порядка отличным от объемного случая образом.

Результаты диссертации опубликованы в [26, 27, 40, 41], были доложены на семинарах ИФП РАН, а так же следующих конференциях:

1. Международная конференция по квантовым жидкостям и кристаллам, QFS2006, Киото, Япония, 2006 г.
2. XXXIV Совещание по физике низких температур, НТ34, Сочи, Россия, 2006 г.
3. Международная конференция по квантовым жидкостям и кристаллам, QFS2007, Казань, Россия, 2007 г.
4. Международная конференция по сверх-низкотемпературной физике, ULT2008, Лондон, Великобритания, 2008 г.
5. Международная конференция по квантовым жидкостям и кристаллам, QFS2009, Чикаго, США, 2009 г.
6. XXXV Совещание по физике низких температур, НТ35, Черноголовка, Россия, 2009 г.
7. Научные конференции МФТИ, Москва, Россия, 2006-2008 гг.

Глава 1

Параметрическая неустойчивость когерентной прецессии в сверхтекучем $^3\text{He} - \text{B}$

1.1 Катастрофическая релаксация. Эксперимент.

В сверхтекучей В-фазе ^3He , в отличие от А-фазы, длинноволновые возмущения не разрушают пространственно однородную прецессию намагниченности [16, 17]. Прецессия устойчива по отношению к таким возмущениям, если начальный угол отклонения намагниченности $\beta > \theta_0$, где $\theta_0 = \arccos(-1/4)$ и маргинально устойчива, если $\beta \leq \theta_0$ [17]. Тем не менее, при низких температурах $T < 0,3 \div 0,4T_c$ однородная прецессия в обоих случаях быстро распадается. Такой распад впервые наблюдался в экспериментах [2, 18] и был назван *катастрофической релаксацией*. Отметим, что несмотря на то, что в указанных двух случаях движение намагниченности описывается разными решениями уравнений спиновой динамики, наличие неустойчивости в обоих случаях говорит о неустойчивости самого класса периодических решений, т.е. когерентной прецессии.

Более важным с экспериментальной точки зрения является наблюдение катастрофической релаксации для случая $\beta > \theta_0$. При наличии небольшого продольного градиента магнитного поля для углов отклонения $\beta > \theta_0$ минимуму энергии системы соответствует решение, которое в литературе называется Однородно Прецессирующим Доменом, далее ОПД. В экспериментах такой случай характеризуется тем, что образуется двухдоменная структура: в области с меньшим магнитным полем намагниченность прецессирует с углами отклонения чуть превышающими θ_0 (ОПД), а в области с большим магнитным полем намагниченность параллельна магнитному полю (рис.1).

Время жизни ОПД гораздо больше времени, определяемого расфазировкой

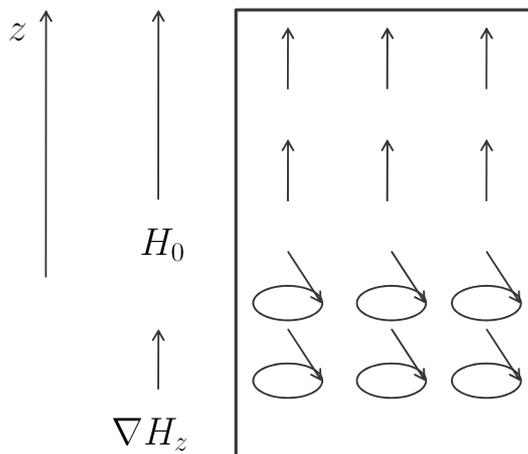


Рис. 6.

Схематичное представление двухдоменной прецессирующей структуры. Стрелки указывают мгновенное направление намагниченности. Кружками обозначены траектории, которые описывает конец вектора намагниченности во время прецессии

из-за неоднородности магнитного поля. Магнитная релаксация ОПД описывается спиновой диффузией через узкую доменную стенку и объемной релаксацией Леггетта-Такаги [19]. На рисунке 2. представлена амплитуда сигнала индукции ОПД при различных температурах. Вначале, при понижении температуры длительность сигнала индукции немного увеличивается вследствие того, что за-

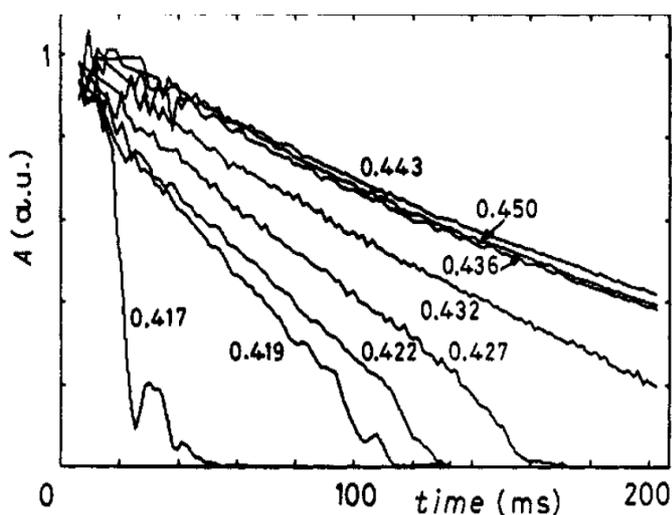


Рис. 7.

Амплитуда сигнала индукции при разных температурах. Давление 20 Бар, постоянное магнитное поле 142 Э, продольный градиент магнитного поля 1 Э/см [2]

тухание из-за спиновой диффузии уменьшается. Однако уже при $T = 0.417T_c$ наблюдается резкое уменьшение длительности сигнала, что говорит о развитии неустойчивости.

В экспериментах [18] было показано, что неустойчивость прецессии с углами $\beta \leq \theta_0$ при тех же условиях наступает раньше, чем для ОПД. Вывод о том, что прецессия намагниченности в ОПД более стабильна можно сделать так же из экспериментов [20], в которых ОПД заполнял экспериментальную ячейку целиком. В этом случае ОПД становился неустойчивым при более низкой температуре.

Одно из количественных описаний неустойчивости было получено в работе [21]. Авторы указанной работы показали, что температуру катастрофической релаксации можно понизить, увеличив постоянное магнитное поле. Зависимость температуры катастрофической релаксации, от величины магнитного поля представлена на рисунке 3. Следует сразу оговориться, что за температуру катастрофической релаксации авторы брали температуру, при которой время

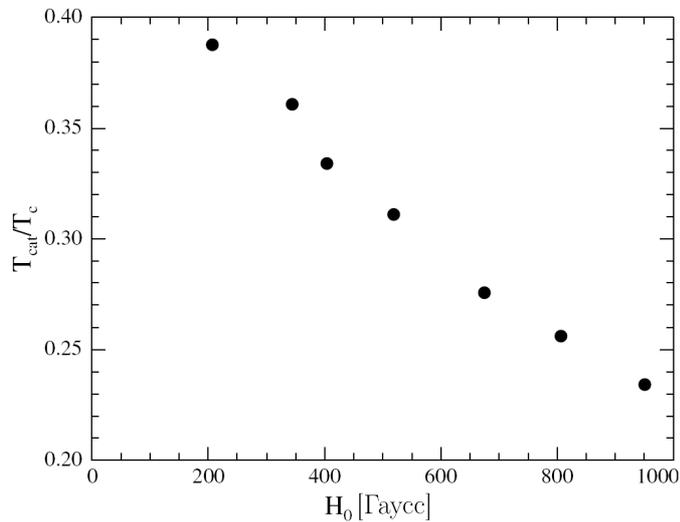


Рис. 8.

Зависимость отношения температуры катастрофической релаксации к температуре сверхтекучего перехода от величины магнитного поля. Измерения выполнены при давлении 31 Бар и продольном градиенте магнитного поля 0.2 Гс/см [21]

жизни ОПД уменьшалось вдвое от максимального значения.

Суммируя все вышесказанное, можно выделить следующие экспериментальные факты относительно катастрофической релаксации:

1. Однородная прецессия при низких температурах неустойчива как для углов отклонения намагниченности $\beta \leq \theta_0$, так и для углов $\beta > \theta_0$.

2. ОПД более устойчив по отношению к исследуемой неустойчивости, чем прецессия с углами $\beta \leq \theta_0$.

3. Температура катастрофической релаксации зависит от величины приложенного магнитного поля.

4. ОПД более устойчив, если целиком заполняет экспериментальную ячейку.

Все указанные экспериментальные наблюдения будут объяснены в рамках предложенной далее модели параметрической неустойчивости однородной прецессии в объеме сверхтекучего ${}^3\text{He} - B$.

1.2 Теоретические модели

До недавнего времени было несколько попыток описать причины катастрофической релаксации [22, 18, 23, ?]. Идея первых трех подходов заключалась в том, что в бесстолкновительном режиме становится возможным расщепление между намагниченностью конденсата и квазичастиц. В результате возникает прецессия двух компонент намагниченности вокруг так называемого молекулярного поля Ландау $\mathbf{H}_L = -F_0^a \mathbf{M} / \chi_{n0}$, где \mathbf{M} – суммарная намагниченность квазичастиц и конденсата, F_0^a – фермижидкостная константа, χ_{n0} – магнитная восприимчивость нормальной фазы без учета фермижидкостных поправок. В момент когда внешнее магнитное поле и внутреннее молекулярное поле сравниваются по величине, начинается резонансное возбуждение внутренней прецессии за счет внешней. Как следствие происходит поглощение энергии внутренней прецессией, обладающей большим затуханием за счет механизма Леггетта-Такаги. Дальнейшие исследования показали, что для низких давлений (от 0 до 6 Бар)

наблюдаемая температура катастрофической релаксации и температура перехода к прецессии в поле Ландау существенно различаются, что говорит о неприменимости данной теории к описанию катастрофической релаксации.

В работе [?] производилось численное моделирование уравнений Леггетта-Такаги для одномерного случая. Авторы обнаружили развитие неустойчивости вследствие образования стоячих спиновых волн, амплитуда которых росла экспоненциально со временем. Несмотря на то, что указанная работа оказалась очень полезной для дальнейшего развития теории, полученные в ней результаты не обладали достаточно большой общностью, так как вычисления производились в ограниченной геометрии лишь для одного угла отклонения намагниченности $\beta = 90^\circ$ и механизм развития неустойчивости так и остался непонятым.

Используя результаты численного счета [?] в статьях [24, 25] была предложена модель, в рамках которой неустойчивость развивается из-за возмущающего действия стенок экспериментальной ячейки на когерентную прецессию. Более детальное описание и сравнение поверхностного механизма развития неустойчивости с рассматриваемой ниже моделью будет сделано в разделе 1.7.

В настоящей работе в качестве возможной причины распада нами рассмотрен процесс параметрического возбуждения прецессирующей намагниченностью спиновых волн с конечными волновыми векторами в объеме сверхтекучего ${}^3\text{He} - B$ [26, 27].

1.3 Уравнения спиновой динамики

Параметром порядка сверхтекучего ${}^3\text{He} - B$ является комплексная матрица 3×3 :

$$A_{\mu j} = e^{i\phi} \cdot \frac{\Delta_B}{\sqrt{3}} \cdot \hat{R}_{\mu j}(\mathbf{n}, \theta), \quad (1.6)$$

где $\hat{R}_{\mu j}(\mathbf{n}, \theta)$ – произвольная матрица вращения, заданная осью вращения \mathbf{n} и углом поворота θ ; Δ_B, ϕ – амплитуда и фаза параметра порядка соответственно. Дипольная энергия жидкого ${}^3\text{He}$ мала. В нулевом приближении по дипольной энергии параметр порядка вырожден по направлениям \mathbf{n} и углам θ . Учет дипольной энергии снимает вырождение по θ для объемного ${}^3\text{He} - B$. Выражение для дипольной энергии в ${}^3\text{He} - B$ имеет вид:

$$U_D = \frac{2}{15} \frac{\chi \Omega_B^2}{g^2} \left(\text{Tr}(\hat{\mathbf{R}}) - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{8}{15} \frac{\chi \Omega_B^2}{g^2} \left(\cos \theta + \frac{1}{4} \right)^2, \quad (1.7)$$

где Ω_B – частота продольного резонанса в ${}^3\text{He} - B$, χ – магнитная восприимчивость, g – гиромагнитное отношение для ядер ${}^3\text{He}$. Минимуму U_D соответствует $\theta_0 = \arccos(-1/4)$. Вырождение по \mathbf{n} снимается при учете еще меньших поправок к энергии системы. Подробнее про энергию, ориентирующую вектор \mathbf{n} в объеме будет написано в Главе 3.

В данной работе будет рассматриваться так называемая *леггеттовская конфигурация* параметра порядка, которая реализуется в объеме ${}^3\text{He}$, т.е. вдали от стенок. Эта конфигурация характеризуется тем, что в равновесии, когда намагниченность направлена по полю, вектор \mathbf{n} так же направлен вдоль магнитного поля. Исходя из этого, параметризуем параметр порядка Эйлеровыми углами α, β, γ , задав ось z ориентированной в направлении, противоположном магнитному полю \mathbf{H}_0):

$$\hat{R}(n, \theta) = \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \hat{R}_z(\alpha) \hat{R}_y(\beta) \hat{R}_z(\gamma). \quad (1.8)$$

В этом случае направление \mathbf{n} находится из уравнения

$$n_i = -\frac{1}{2 \sin \theta} e_{ikl} R_{kl}(\alpha, \beta, \gamma), \quad (1.9)$$

и удовлетворяет условию $n_z \rightarrow 1$, если $\beta \rightarrow 0$, а $\alpha + \gamma = \text{const}$. Вместо угла γ удобно использовать сумму $\Phi = \alpha + \gamma$. Указанным выше координатам канонически сопряжены комбинации проекций спина, соответственно $P = S_z - S_\zeta, S_\beta,$

S_ζ , где S_z — проекция спина на ось z , S_ζ — на ось $\zeta = \hat{R}\hat{z}$ и S_β — проекция на линию узлов (см. напр.[28]). Уравнения движения — гамильтоновы по отношению к указанным парам переменных с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{1 + \cos \beta} \left\{ S_\zeta^2 + P S_\zeta + \frac{P^2}{2(1 - \cos \beta)} \right\} + \frac{1}{2} S_\beta^2 + F_\nabla - \omega_L (P + S_\zeta) + U_D(\alpha, \beta, \Phi). \quad (1.10)$$

Здесь ω_L — ларморовская частота, соответствующая постоянному магнитному полю, F_∇ — градиентная энергия. Единицы выбраны так, чтобы магнитная восприимчивость χ и гиромагнитное отношение g равнялись единице. При таком выборе спин имеет размерность частоты, а энергия — квадрата частоты. Градиентная энергия для леггеттовской конфигурации имеет вид:

$$F_\nabla = \frac{1}{2} [c_\parallel^2 \delta_{ik} \delta_{\xi\eta} - (c_\parallel^2 - c_\perp^2) (\delta_{i\xi} \delta_{k\eta} + \delta_{i\eta} \delta_{k\xi})] \omega_{i\xi} \omega_{k\eta}, \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{1\xi} &= -\alpha_{,\xi} \sin \beta \cos(\Phi - \alpha) + \beta_{,\xi} \sin(\Phi - \alpha), \\ \omega_{2\xi} &= \alpha_{,\xi} \sin \beta \sin(\Phi - \alpha) + \beta_{,\xi} \cos(\Phi - \alpha), \\ \omega_{3\xi} &= \alpha_{,\xi} \cos \beta + \Phi_{,\xi} - \alpha_{,\xi}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$\alpha_{,\xi} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_\xi}$ и т.п., c_\parallel^2 и c_\perp^2 — квадраты скоростей двух типов спиновых волн (продольной и поперечной). Выражение для дипольной энергии в леггеттовской конфигурации $U_D(\alpha, \beta, \Phi)$ не зависит от угла α :

$$U_D(\beta, \Phi) = \frac{2}{15} \Omega_B^2 \left[\cos \beta - \frac{1}{2} + (1 + \cos \beta) \cos \Phi \right]^2. \quad (1.13)$$

Порождаемые гамильтонианом (1.10) уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial P}, & \frac{\partial P}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\xi} \frac{\partial H}{\partial \alpha_{,\xi}}, \\ \frac{\partial \beta}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial S_\beta}, & \frac{\partial S_\beta}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial x_\xi} \frac{\partial H}{\partial \beta_{,\xi}}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial S_\zeta}, & \frac{\partial S_\zeta}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial \Phi} + \frac{\partial}{\partial x_\xi} \frac{\partial H}{\partial \Phi_{,\xi}}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Прецессия описывается пространственно однородным стационарным решением (1.14) [28]:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial S_\beta}{\partial t} = \frac{\partial S_z}{\partial t} = 0. \quad (1.15)$$

При $\beta < \theta_0$ решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\omega_p t + \alpha_0, \quad \gamma = \omega_p t + \Phi^{(0)} - \alpha_0, \\ P^{(0)} &= \omega_p (\cos \beta - 1), \quad S_\beta^{(0)} = 0, \quad S_z^{(0)} = \omega_p \cos \beta, \\ \cos \Phi^{(0)} &= (\frac{1}{2} - \cos \beta^{(0)}) / (1 + \cos \beta^{(0)}), \end{aligned} \quad (1.16)$$

где ω_p – частота прецессии. А при $\beta > \theta_0$:

$$P^{(0)} = -2\delta \sin^2(\beta/2), \quad S_z^{(0)} = \omega_L \cos^2(\beta/2) - \delta \sin^2(\beta/2), \quad \Phi^{(0)} = 0, \quad (1.17)$$

где

$$\delta = \left(\omega_L^2 - \frac{16}{15} \Omega_B^2 (1 + 4 \cos \beta) \right)^{1/2}. \quad (1.18)$$

Явную зависимость стационарных решений (1.16) от времени можно исключить перейдя к переменной $\psi = \alpha + \omega_p t$ с одновременным переходом к гамильтониану $\tilde{H} = H + \omega_p P$, тогда $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$.

1.4 Спиновые волны на фоне прецессии

Чтобы найти спектр возбуждений на фоне прецессии следует линеаризовать уравнения движения по малым отклонениям переменных от стационарных решений (1.16, 1.17): $\delta\psi(\mathbf{r}, t) = \psi - \psi^{(0)}$ и т.п.. Для упрощения дальнейших выкладок удобно использовать в качестве переменных следующие комбинации указанных отклонений:

$$\begin{aligned} \nu &= \sin \beta \delta\psi, \quad \vartheta = \frac{\delta P + (1 - \cos \beta) \delta S_\zeta}{\omega_L \sin \beta}, \\ \varepsilon &= \delta \Phi - (1 - \cos \beta) \delta\psi, \quad \sigma = \delta S_\zeta / \omega_L, \\ \zeta &= \delta S_\beta / \omega_L, \quad \eta = -\delta\beta. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Единицы времени и длины в дальнейшем выбраны так, что $\omega_L = 1$ и $c_{\parallel} = 1$. Без ограничения общности можно считать, что переменные изменяются только в направлениях y и z , тогда не зависящая от времени часть градиентной энергии имеет вид:

$$F_{\nabla st} = \frac{1}{2}[(1 - \mu)(\nu_{,y}^2 + \eta_{,y}^2) + \nu_{,z}^2 + \eta_{,z}^2 + \varepsilon_{,y}^2 + (1 - 2\mu)\varepsilon_{,z}^2], \quad (1.20)$$

где $\mu = 1 - c_{\perp}^2/c_{\parallel}^2$ – анизотропия скоростей спиновых волн. Параметр μ будет считаться малым, фактически $\mu \approx 1/4$ [29]. Кроме того F_{∇} содержит также члены, осциллирующие с частотой прецессии:

$$F_{\nabla osc1} = -\mu[(\eta_{,y}\varepsilon_{,z} + \eta_{,z}\varepsilon_{,y}) \cos \omega_p t + (\nu_{,y}\varepsilon_{,z} + \nu_{,z}\varepsilon_{,y}) \sin \omega_p t] \quad (1.21)$$

и с удвоенной частотой прецессии

$$F_{\nabla osc2} = -\frac{\mu}{2}[(\eta_{,y}^2 - \nu_{,y}^2) \cos 2\omega_p t + 2\nu_{,y}\eta_{,y} \sin 2\omega_p t]. \quad (1.22)$$

В нулевом приближении по малым параметрам μ и Ω_B^2 уравнения для добавок имеют гамильтонов вид с гамильтонианом:

$$h = \frac{1}{2}[(\vartheta + \eta)^2 + \zeta^2 + \sigma^2 + (\nabla\nu)^2 + (\nabla\eta)^2 + (\nabla\varepsilon)^2] \quad (1.23)$$

по отношению к парам канонически сопряженных переменных (ε, σ) ; (ν, ϑ) ; (ζ, η) . В каждой из пар первая переменная – координата, вторая – импульс. Отметим, что используя данный гамильтониан без осциллирующих членов, мы находим *стационарные* спиновые возбуждения на фоне однородной прецессии, т.е. с независимыми от времени амплитудами и частотами.

Запишем уравнения движения для добавок в векторном виде:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \hat{M}_0 \mathbf{X}, \quad (1.24)$$

где все добавки объединены в один шести-компонентный векторный столбец

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \sigma \\ \nu \\ \vartheta \\ \zeta \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

а матрица \hat{M}_0 , получающаяся из (1.23) записывается как:

$$\hat{M}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nabla^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 - \nabla^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Решения системы (1.24) имеют вид плоских волн $\mathbf{e}_j^\pm \exp[i(\mathbf{kr} \mp \omega_j t)]$. Здесь \mathbf{e}_j^\pm правые собственные векторы матрицы \hat{M}_0 , соответствующие собственным значениям $\mp i\omega_j$. Для проектирования нам понадобятся также левые собственные векторы той же матрицы \mathbf{f}_j^\pm , их можно отнормировать так, чтобы выполнялись условия:

$$(\mathbf{f}_i^+, \mathbf{e}_j^+) = \delta_{ij}, \quad (\mathbf{f}_i^+, \mathbf{e}_j^-) = 0, \quad (1.27)$$

где скалярное произведение определено как

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{n=1}^6 a_n^* b_n. \quad (1.28)$$

Заметим, что матрица \hat{M}_0 не является эрмитовой и поэтому $\mathbf{f}_j^+ \neq (\mathbf{e}_j^+)^T$.

Закон дисперсии для продольной моды колебаний (колеблется продольная составляющая намагниченности) имеет вид:

$$\omega_1 = k. \quad (1.29)$$

Левые и правые собственные векторы для данного колебания записываются соответственно как:

$$\mathbf{f}_1^\pm = \frac{1}{2\omega_1} \left(\omega_1; \mp i; 0; 0; 0; 0 \right), \quad \mathbf{e}_1^\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i\omega_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Для двух поперечных мод получаются следующие законы дисперсии:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{4} + k^2} - \frac{1}{2}, \quad (1.31)$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{1}{4} + k^2} + \frac{1}{2}. \quad (1.32)$$

При $k \rightarrow 0$ $\omega_2 \sim k^2$, т.е. это - бесщелевая мода, возникающая из-за вырождения прецессии по ее фазе α_0 . Другая - нутационная мода имеет при $k \rightarrow 0$ щель $\omega_3 = \omega_L$ (рис.4.). Частотам $\pm\omega_2$, $\pm\omega_3$ соответствуют следующие левые и правые собственные векторы:

$$\mathbf{f}_2^\pm = \frac{1}{2\omega_{23}} \left(0; 0; \omega_3; \mp i; \mp i\omega_2; 1 \right), \quad \mathbf{e}_2^\pm = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \mp i\omega_3 \\ \mp i \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

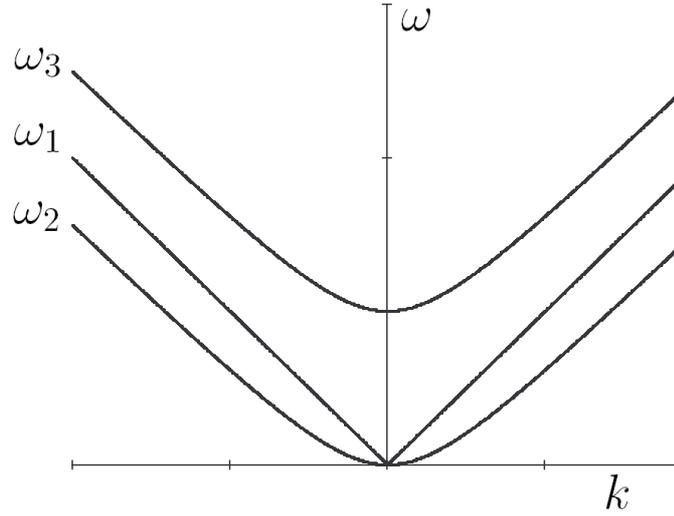


Рис. 9.

Законы дисперсии для спиновых волн на фоне прецессии. ω_1 – продольная мода колебаний, ω_2 – бесщелевая мода поперечных колебаний, возникающая из-за вырождения по фазе прецессии α_0 , ω_3 – поперечная нутационная мода, имеющая щель $\omega_3 = \omega_L$ при $k \rightarrow 0$

$$\mathbf{f}_3^\pm = \frac{1}{2\omega_{23}} \left(0; 0; \omega_2; \mp i; \pm i\omega_3; -1 \right), \quad \mathbf{e}_3^\pm = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \mp i\omega_2 \\ \pm i \\ -\omega_3 \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

где $\omega_{23} = \omega_2 + \omega_3$.

1.5 Параметрическое возбуждение спиновых волн однородной прецессией

Зависящие от времени поправки к гамильтониану (1.23) могут приводить к рождению и взаимным превращениям возбуждений. При $\mathbf{n} \perp \mathbf{H}_0$ дипольная энергия не содержит нестационарных членов, а градиентная энергия в первом приближении по μ содержит осциллирующие члены (1.21),(1.22). С учетом осциллиру-

ющих членов уравнения движения для добавок, можно записать в виде:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \left(\hat{M}_0 + \hat{V}(t) \right) \mathbf{X}, \quad (1.35)$$

где в матрицу $\hat{V}(t)$ собраны все зависящие от времени члены. Сумма добавок (1.21) и (1.22) дает

$$\hat{V}(t) = \sum_{n=1,2} \left[\hat{W}_n \exp(-in\omega_p t) + \hat{W}_n^* \exp(in\omega_p t) \right], \quad (1.36)$$

где явные выражения для \hat{W}_1 и \hat{W}_2 находятся с помощью равенств (1.21) и (1.22):

$$\hat{W}_1 = \mu \nabla_x \nabla_y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{W}_2 = \mu \nabla_y^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{i}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

Следуя процедуре нестационарной теории возмущений, будем искать решение системы (1.35) в виде разложения по собственным векторам матрицы \hat{M}_0

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j, \mathbf{k}} \{ a_{j\mathbf{k}}^+(t) \mathbf{e}_{j\mathbf{k}}^+ \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_j t) + a_{j\mathbf{k}}^-(t) \mathbf{e}_{j\mathbf{k}}^- \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega_j t) \} \quad (1.38)$$

Подстановка (1.38) в (1.35) и разделение уравнений по \mathbf{k} дает:

$$\begin{aligned} \sum_j \{ \dot{a}_{j\mathbf{k}}^+ \mathbf{e}_{j\mathbf{k}}^+ \exp(-i\omega_j t) + \dot{a}_{j\mathbf{k}}^- \mathbf{e}_{j\mathbf{k}}^- \exp(i\omega_j t) \} = \\ \sum_{j,n} (\hat{W}_n \exp(-in\omega_p t) + \hat{W}_n^* \exp(in\omega_p t)) \cdot \\ \cdot \{ a_{j\mathbf{k}}^+ \mathbf{e}_{j\mathbf{k}}^+ \exp(-i\omega_j t) + a_{j\mathbf{k}}^- \mathbf{e}_{j\mathbf{k}}^- \exp(i\omega_j t) \} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Умножая теперь обе части уравнения (1.39) на $\mathbf{f}_l^+ \exp(i\omega_l t)$ и опуская общий для всех членов равенства индекс \mathbf{k} , имеем:

$$\begin{aligned} \dot{a}_l^+ = \sum_{j,n} \{ & a_j^-(\mathbf{f}_l^+, \hat{W}_n \mathbf{e}_j^-) \exp[i(\omega_l + \omega_j - n\omega_p)t] + \\ & a_j^+(\mathbf{f}_l^+, \hat{W}_n^* \mathbf{e}_j^+) \exp[i(\omega_l - \omega_j + n\omega_p)t] \}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

По смыслу процедуры предполагается, что коэффициенты $a_{j\mathbf{k}}^\pm$ мало изменяются за время $\sim 1/\omega_p$. Усреднение уравнения (1.40) показывает, что нетривиальные соотношения между разными $a_{j\mathbf{k}}^\pm$ могут возникать только вблизи резонансов: $\omega_j(\mathbf{k}) - \omega_l(\mathbf{k}) = n\omega_p$ и $\omega_l(\mathbf{k}) + \omega_j(-\mathbf{k}) = n\omega_p$. Рождению квазичастиц из "вакуума" соответствует второй резонанс. В соответствии с равенством $\omega_j(\mathbf{k}) = \omega_j(-\mathbf{k})$ изменен знак одного из импульсов. В дальнейшем мы будем предполагать, что резонансное соотношение выполняется точно, при этом получается максимальный инкремент развития неустойчивости. Если при заданном \mathbf{k} резонансное условие выполняется только для двух состояний l и j , то

$$\dot{a}_l^+ = (\mathbf{f}_l^+, \hat{W} \mathbf{e}_j^-) a_j^-. \quad (1.41)$$

Аналогичные рассуждения дают для a_j^- :

$$\dot{a}_j^- = (\mathbf{f}_j^-, \hat{W}^* \mathbf{e}_l^+) a_l^+. \quad (1.42)$$

Система уравнений (1.41),(1.42) имеет решения $\sim \exp(\pm \lambda t)$, где λ определяется согласно $\lambda^2 = (\mathbf{f}_j^+, \hat{W} \mathbf{e}_l^-)(\mathbf{f}_l^+, \hat{W} \mathbf{e}_j^-)^*$. Тем самым задача об определении инкремента неустойчивости свелась к вычислению элементов матрицы $(\mathbf{f}_j^+, \hat{W} \mathbf{e}_l^-)$ между состояниями, удовлетворяющими условию резонанса. В частности, если $l = j$, то $2\omega_l(\mathbf{k}) = n\omega_p$ и $\lambda^2 = |(\mathbf{f}_j^+, \hat{W} \mathbf{e}_l^-)|^2$. Это – простейший случай *параметрического резонанса* [30].

Непосредственной проверкой можно убедиться, что матричный элемент $(\mathbf{f}_j^+, \hat{W}_1 \mathbf{e}_l^-)$ отличен от нуля только при $j = 1, l = 3$. Условие резонанса $\omega_1(\mathbf{k}) + \omega_3(-\mathbf{k}) = \omega_L$ удовлетворяется только при $k = 0$, но при таком значении k матричный элемент обращается в нуль из-за множителя $k_y k_z$. В матрице $(\mathbf{f}_j^+, \hat{W}_2 \mathbf{e}_l^-)$

ненулевое значение имеет элемент, соответствующий $j = l = 3$. В этом случае резонансное условие $\omega_3(\mathbf{k}) + \omega_3(-\mathbf{k}) = 2\omega_L$ также выполняется только при $k = 0$ и соответствующий матричный элемент равен нулю из-за множителя k_y^2 . Таким образом, *если пренебречь дипольной энергией, то анизотропия скоростей спиновых волн не приводит к связи прецессии со спиновыми волнами.* Такой вывод, по все видимости, является следствием некоторого закона сохранения, например продольной компоненты намагниченности. Однако доказать это утверждение для данной системы достаточно сложно.

Ненулевые матричные элементы между состояниями, удовлетворяющими условию резонанса, возможны при учете дипольной энергии. Для учета дипольной энергии в правую часть линеаризованного уравнения (1.35) к матрице \hat{M}_0 следует добавить матрицу момента дипольных сил \hat{N}_D и заново найти энергии возбуждений и соответствующие им собственные векторы. Добавленные в уравнение (1.35) члены малы по сравнению с элементами матрицы \hat{M}_0 в меру отношения $(\Omega_B/\omega_L)^2$, которое для типичных условий $\sim 10^{-1} - 10^{-2}$. В первом приближении по указанному параметру элементы матрицы $(\mathbf{f}_j^+, \hat{W}_n \mathbf{e}_l^-)$ даются выражением:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{f}_j^+, \hat{W}_n \mathbf{e}_l^-) = & i \sum_{m \neq j^+} \frac{1}{\omega_{j^+} - \omega_m} (\mathbf{f}_j^+, \hat{N}_D \mathbf{e}_m) (\mathbf{f}_m, \hat{W}_n \mathbf{e}_l^-) + \\
 & i \sum_{m \neq l^-} \frac{1}{\omega_{l^-} - \omega_m} (\mathbf{f}_j^+, \hat{W}_n \mathbf{e}_m) (\mathbf{f}_m, \hat{N}_D \mathbf{e}_l^-). \quad (1.43)
 \end{aligned}$$

Матрица \hat{N}_D в первом порядке по $(\Omega_B/\omega_L)^2$ имеет вид:

$$\hat{N}_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial U_D}{\partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 U_D}{\partial \Phi^2} & 0 & -\frac{\partial^2 U_D}{\partial \Phi^2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 U_D}{\partial \beta \partial \Phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial U_D}{\partial \beta} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \\ -\frac{\partial^2 U_D}{\partial \Phi^2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} & 0 & -\frac{\partial^2 U_D}{\partial \Phi^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 U_D}{\partial \beta \partial \Phi} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \\ -\frac{\partial^2 U_D}{\partial \beta \partial \Phi} & -\frac{\partial U_D}{\partial \beta} & -\frac{\partial^2 U_D}{\partial \beta \partial \Phi} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} & \frac{\partial U_D}{\partial \beta} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} & 0 & \frac{\partial^2 U_D}{\partial \beta^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

В результате ненулевые матричные элементы получаются для следующих резонансов:

$$\omega_1(k) + \omega_1(-k) = \omega_p, \quad k = 1/2, \quad \beta \leq \theta_0, \quad (1.45)$$

$$\omega_1(k) + \omega_2(-k) = \omega_p, \quad k = 2/3, \quad (1.46)$$

$$\omega_1(k) + \omega_3(-k) = 2\omega_p, \quad k = 2/3, \quad (1.47)$$

$$\omega_2(k) + \omega_3(-k) = 2\omega_p, \quad k = \sqrt{3}/2. \quad (1.48)$$

Возбуждение спиновых волн однородной прецессией обусловлено совместным действием анизотропии спиновых волн и дипольной энергией. Благодаря анизотропии скоростей спиновых волн в уравнениях для малых возмущений однородной прецессии возникают члены, осциллирующие с частотами ω_p и $2\omega_p$, которые могут параметрически возбуждать спиновые волны. Однако проекции, зависящего от времени возмущения, на собственные вектора колебаний оказываются равными нулю для всех резонансных условий. После учета дипольной энергии собственные вектора изменяются так, что возникают необходимые ненулевые проекции. Исходя из этого, ненулевые инкременты пропорциональны произведе-

дению двух малых параметров $\mu \cdot \Omega_B^2 / \omega_L^2$ на частоту прецессии ω_L . Для $k=1/2$

$$\lambda_{(11)} = \begin{cases} \mu \sin(2\delta) \frac{\sqrt{(1 - \cos(\beta))(1 + 4 \cos(\beta))} \Omega_B^2}{5 \omega_L}, & \beta \leq \theta_0, \\ 0 & \beta > \theta_0, \end{cases} \quad (1.49)$$

где δ - угол между направлением волнового вектора \mathbf{k} и направлением магнитного поля. При $k=2/3$ имеются два резонанса и для нахождения инкремента надо рассматривать систему уравнений для трех амплитуд:

$$\begin{cases} \dot{a}_1^+ = (\mathbf{f}_1^+, \hat{W} \mathbf{e}_2^-) a_2^- + (\mathbf{f}_1^+, \hat{W} \mathbf{e}_3^-) a_3^-, \\ \dot{a}_2^- = (\mathbf{f}_2^-, \hat{W}^* \mathbf{e}_1^+) a_1^+, \\ \dot{a}_3^- = (\mathbf{f}_3^-, \hat{W}^* \mathbf{e}_1^+) a_1^+. \end{cases} \quad (1.50)$$

В этом случае инкремент определяется выражением

$$\lambda_{(12,13)} = \sqrt{\lambda_{(12)}^2 + \lambda_{(13)}^2}, \quad (1.51)$$

где

$$\lambda_{(12)} = \begin{cases} \mu \sin(2\delta) \frac{\sqrt{10}(1 - \cos(\beta)) \Omega_B^2}{25 \omega_L}, & \beta \leq \theta_0, \\ \mu \sin(2\delta) \frac{|4 \cos^2(\beta) + 31 \cos(\beta) + 15| \Omega_B^2}{15\sqrt{10} \omega_L}, & \beta > \theta_0, \end{cases} \quad (1.52)$$

$$\lambda_{(13)} = \begin{cases} \mu \sin^2(\delta) \frac{\sqrt{10} \sqrt{(1 - \cos(\beta))(1 + 4 \cos(\beta))} \Omega_B^2}{25 \omega_L}, & \beta \leq \theta_0, \\ -\mu \sin^2(\delta) \frac{\sqrt{10} \sin(\beta)(1 + 4 \cos(\beta)) \Omega_B^2}{225 \omega_L}, & \beta > \theta_0, \end{cases} \quad (1.53)$$

Резонансу при $k = \sqrt{3}/2$ соответствует инкремент

$$\lambda_{(23)} = \begin{cases} \mu \sin^2(\delta) \frac{3(1 - \cos(\beta)) \Omega_B^2}{20 \omega_L}, & \beta \leq \theta_0, \\ \mu \sin^2(\delta) \frac{|4 \cos^2(\beta) + 31 \cos(\beta) + 15| \Omega_B^2}{40 \omega_L}, & \beta > \theta_0. \end{cases} \quad (1.54)$$

На рисунке 5. представлены зависимости всех инкрементов от угла отклонения намагниченности; $\delta = \pi/4$ для $\lambda_{(11)}$, $\lambda_{(12,13)}$ и $\delta = \pi/2$ для $\lambda_{(23)}$. Отметим особенность при $\beta = 104^\circ$, которая возникает из-за того, что во вторых производных

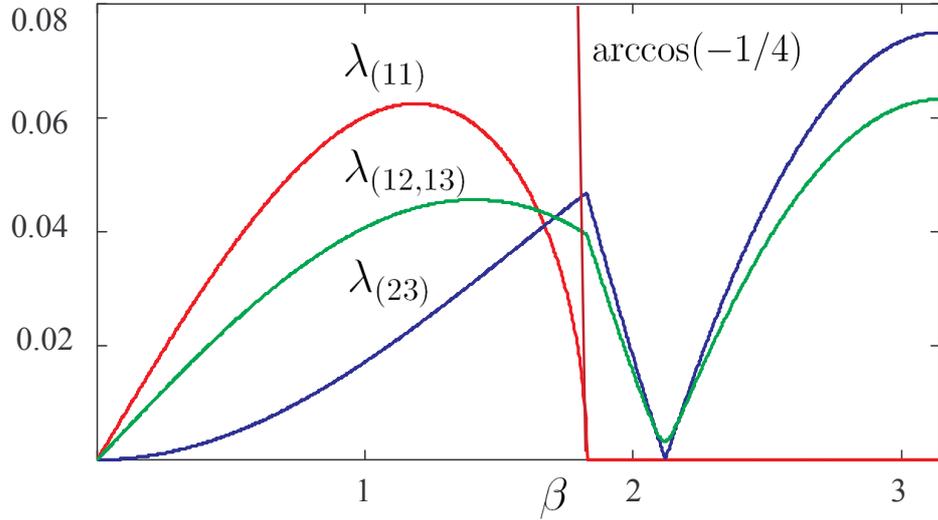


Рис. 10.

Зависимость инкрементов нарастания амплитуд спиновых волн от угла отклонения намагниченности β . $\delta = \pi/4$ для $\lambda_{(11)}$, $\lambda_{(12,13)}$ и $\delta = \pi/2$ для $\lambda_{(23)}$. $\Omega_B = 1$, $\omega_L = 1$

дипольной энергии по углам имеется разрыв, так как они взяты для разных решений. Как и при описании суловской неустойчивости в теории магнетиков, каждый из найденных инкрементов соответствует некоторому процессу распада (рис.6.). Интересным является тот факт, что существенный вклад в неустойчивость вносят комбинированные резонансы, при которых одновременно возбуждаются спиновые волны принадлежащие разным ветвям спектра. При заданном значении β имеется максимальный инкремент, который можно записать как,

$$\lambda_{max}(\beta) = a(\beta)\mu \frac{\Omega_B^2}{\omega_L}, \quad (1.55)$$

где зависимость коэффициента a от угла отклонения намагниченности представлена на рисунке 7. Именно максимальный инкремент определяет порог неустойчивости для каждого из углов β . В экспериментально важной окрестности угла 104° максимальный инкремент соответствует комбинированному резонансу $\omega_2(k) + \omega_3(-k) = 2\omega_p$.

Для проверки аналитически полученных инкрементов была произведена численная симуляция линеаризованных уравнений Леггетта для волновых векторов k , удовлетворяющих условиям резонанса. Для выбранных нами углов от-

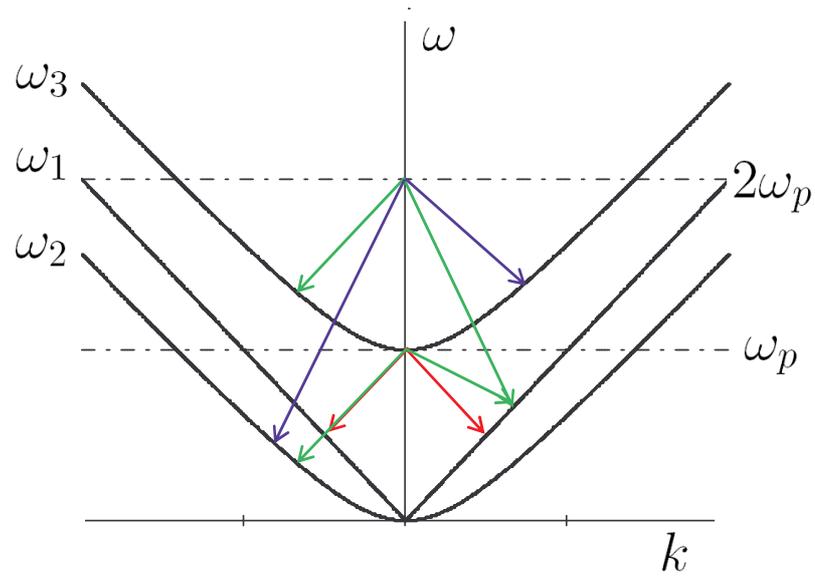


Рис. 11.

Процессы распада, соответствующие резонансам (1.45)

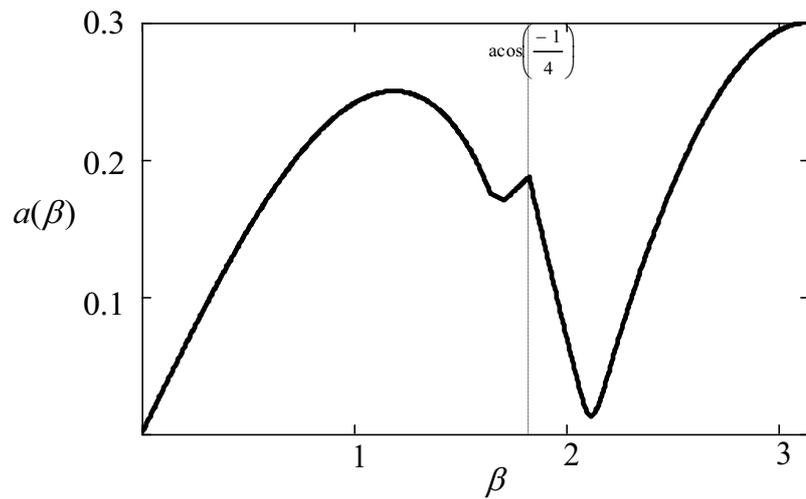


Рис. 12.

Зависимость коэффициента a в формуле (1.55) от угла отклонения намагниченности β

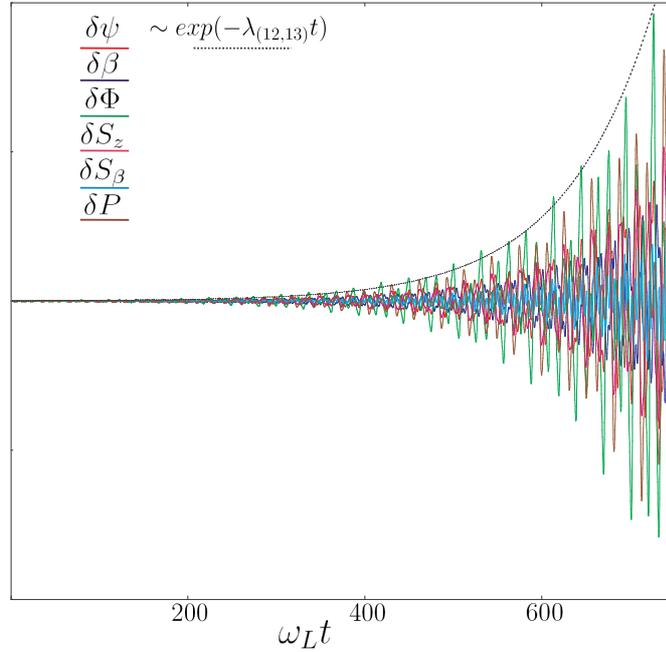


Рис. 13.

Численное решение линеаризованных уравнений Леггетта для $\beta_0 = \arccos(-1/4)$. Найденное решение соответствует $k = 2/3$, $\delta = \pi/4$, $\omega_L = 1$, $\Omega_B = 1/2$. Пунктирная линия соответствует аналитически найденному инкременту $\lambda_{(12,13)}$ для данных значений параметров

клонения намагниченности и направлений \mathbf{k} было получено хорошее согласие с аналитическими результатами (рис.2.2).

1.6 Порог неустойчивости

При конечных температурах следует учитывать затухание спиновых волн. Неустойчивость наступает, если инкремент нарастания волн, удовлетворяющих резонансному условию, превышает декремент их затухания. Для оценки температуры катастрофической релаксации T_{cat} будем считать, что основным механизмом диссипации является спиновая диффузия. Уравнения движения содержащие члены, описывающие спиновую диффузию, достаточно громоздки. Поэтому для оценки температуры начала развития неустойчивости запишем закон дисперсии спиновых волн с учетом мнимой поправки в простом виде:

$$\omega'_i(\mathbf{k}) = \omega_i(\mathbf{k}) - i \frac{D(T)k^2}{2}, \quad (1.56)$$

где $D(T)$ - коэффициент спиновой диффузии. Для случая сверхтекучего ${}^3\text{He}-\text{B}$ коэффициент диффузии, вообще говоря, является тензором. Мы будем подразумевать, что $D(T)$ соответствует поперечной компоненте указанного тензора $D_{\perp}(T)$. Минимальная температура, до которой прецессия все еще устойчива находится тогда из уравнения:

$$\frac{D(T)k^2}{2} = \lambda_{max}. \quad (1.57)$$

При температурах $T \leq 0.4T_c$, о которых идет речь, инкремент слабо зависит от температуры и можно пользоваться его значением при $T = 0$. Левая часть уравнения (1.57) сильно зависит от температуры из-за спиновой диффузии, которая при $T \rightarrow 0$ ведет себя как

$$D(T, \omega_L) \sim \frac{1}{\omega_L} \sqrt{T/\Delta} \exp(-\Delta/T), \quad (1.58)$$

где Δ – щель в спектре возбуждений [31]. Именно зависимость $D(T)$ определяет температурную зависимость порога неустойчивости.

1.7 Сравнение объемного и поверхностного вкладов в инкремент неустойчивости

Найденные инкременты обусловлены связью прецессии со спиновыми волнами в объеме гелия. В работах [24, 25] был найден инкремент, возникающий вследствие усиления этой связи вблизи стенок. Из-за граничных условий на стенке прецессия происходит в конфигурации, отличной от леггеттовской, и осциллирующие члены в дипольной энергии возникают без посредства анизотропии градиентной энергии. При этом локальная связь вблизи границы оказывается по порядку величины в $1/\mu$ раз большей, чем полученная здесь для объема гелия. На рисунке 9. показана конфигурация параметра порядка полученная при помощи численного решения уравнений Леггетта-Такаги для начального угла отклонения намагниченности (спина) 90° в одномерной геометрии [3, 24].

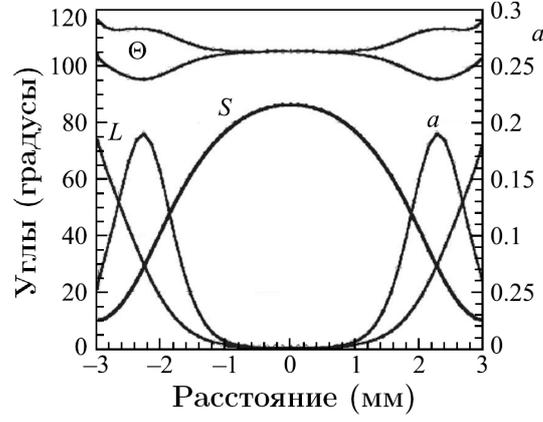


Рис. 14.

Конфигурация параметра порядка для прецессирующего состояния между двумя бесконечными параллельными стенками при начальном отклонении угла $\beta = 90^\circ$, полученная при помощи численного решения уравнений Леггетта-Такаги в одномерной геометрии [3, 24]. По оси ординат слева отложены углы отклонения векторов \mathbf{S} и \mathbf{L} от направления магнитного поля и угол θ , входящий в дипольную энергию (1.7). По оси ординат справа отложено значение параметра $a(\mathbf{S}, \mathbf{L})$, описывающего дополнительную связь прецессии со спиновыми волнами из-за отклонения параметра порядка от леггеттовской конфигурации

Орбитальный вектор \mathbf{L} , описывающий орбитальную степень свободы параметра порядка, по определению равен $L_j = -R_{\alpha j}(t)S_\alpha(t)$. Для такой параметризации параметра порядка конфигурации леггетта соответствует $\mathbf{L} \parallel \mathbf{H}$. Найденный авторами инкремент неустойчивости зависит от направлений \mathbf{L} и \mathbf{S} в каждой точке пространства, а после усреднения по координате имеет вид:

$$\lambda_s = \bar{a} \frac{\Omega_B^2}{2\omega_L}, \quad (1.59)$$

где $\bar{a} = 0.099$ для данной симуляции. Оценка объемного вклада в инкремент по полученным выше формулам для тех же условий дает следующее значение инкремента:

$$\lambda^{max} = \lambda_{(11)}|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \mu \frac{\Omega_B^2}{5\omega_L}. \quad (1.60)$$

Учитывая, что $\mu \approx 1/4$, получим, что объемный и поверхностный вклад в инкремент неустойчивости для данных условий практически одинаковые.

Разделить поверхностный и объемный вклады по их зависимости от величин

ны магнитного поля не удастся, поскольку оба вклада пропорциональны Ω_B^2/ω_L . Следует иметь в виду, однако, что поверхностный вклад в инкремент зависит от отношения объема пристеночной области к полному объему гелия. Для углов $\beta < 104^\circ$ отсутствует характерная длина, на которую проникает возмущающее влияние стенок на прецессию и приграничная область составляет существенную часть объема. Например в рассмотренном выше случае пристеночная область составляет половину полного объема. В более интересной для эксперимента области $\beta > 104^\circ$, которая соответствует ОПД, такая характерная длина возникает. Она обусловлена тем, что в присутствии градиента магнитного поля частота прецессии ω_p отличается от ларморовской и к энергии системы добавляется член, называемый в некоторых статьях *спектроскопической энергией*:

$$F_{sp} = \omega_p (\omega_p - \omega_L(z)) \cos \beta. \quad (1.61)$$

"Длина когерентности", возникающая в неоднородной задаче имеет поэтому порядок [32, 33]:

$$\xi(z) = c_{\parallel} / \sqrt{\omega_p (\omega_p - \omega_L(z))} \quad (1.62)$$

Несмотря на наличие градиента магнитного поля когерентная прецессия становится возможной благодаря сдвигу частоты, возникающему в ${}^3\text{He} - B$, если дипольная энергия находится не в минимуме. Соответствующий сдвиг для $\beta > 104^\circ$ появляется при отклонении угла β от 104° :

$$\Delta\omega(z) = -\frac{16}{15} \frac{\Omega_B^2}{\omega_L} \left(\cos \beta(z) + \frac{1}{4} \right). \quad (1.63)$$

Таким образом для установления когерентной прецессии отклонение угла β в каждой точке пространства должно задаваться равенством:

$$\cos \beta(z) = -\frac{1}{4} - \frac{15 \omega_p (\omega_p - \omega_L(z))}{16 \Omega_B^2}, \quad (1.64)$$

$\omega_p > \omega_L(z)$. Сдвиг частоты в описанном в разделе 1.1 эксперименте с ОПД при $T \sim 0.4T_c$ составляет примерно $1.9 \cdot 10^4$ 1/с, при $\omega_L = 2.8 \cdot 10^6$ 1/с и $\nabla\omega_L = 2 \cdot 10^4$

$1/c \cdot \text{см}$ [2], что соответствует средней длине когерентности $\xi \sim 10^{-2}$ см и максимальному сдвигу угла β на 0.5° ($c_{\parallel} = 1.6 \cdot 10^3$ см/с). Можно оценить отношение объема пристеночной области к объему той части ячейки, где находится ОПД.

$$\frac{V_s}{V_{HPD}} \sim 1 - \frac{1}{R^2 L} \int_{z_0}^L (R - \xi(z))^2 dz, \quad (1.65)$$

где R - радиус цилиндрической ячейки, L - размер ОПД, $\xi(z) \approx c_{\parallel} / \sqrt{\omega_p \cdot \nabla \omega_z \cdot z}$, $\xi(z_0) = R$. Для указанного выше градиента поля и измеряемого сдвига, получается, что ОПД занимает всю ячейку целиком ($R = L/2 = 3$ мм). В этом случае отношение пристеночного объема к полному объему получается порядка 10%. Как мы видим, для типичных условий пристеночная область составляет малую часть прецессирующего объема, поэтому инкремент должен определяться объемным резонансом $\omega_2(k) + \omega_3(-k) = 2\omega_p$ при $\beta \cong 104^\circ$.

1.8 Сравнение с экспериментом

Большая часть данных о катастрофической релаксации получена в экспериментах с однородно прецессирующим доменом. Экспериментальные данные о коэффициенте диффузии [34] относятся к температурам $T > 0.4T_c$, так как он находится как раз при помощи релаксации ОПД. Исходя из этого мы можем проверить соответствие теоретически оцененной температуры катастрофической релаксации только для одной экспериментальной точки, используя полученную в работе [31] экстраполяцию экспериментальных точек для коэффициента диффузии до $0.4T_c$. В экспериментах [2] при давлении $P \simeq 20$ бар и магнитном поле $H \simeq 142$ Э дополнительный канал релаксации появляется при $T_{cat} \simeq 0.43T_c$ (рис.1). Используя формулу (1.57) при следующих значениях параметров: $\Omega = 2\pi \cdot 250 \cdot 10^3$ 1/с, $c_{\parallel} = 1.6 \cdot 10^3$ см/с, $\mu = 1/4$ получим значение коэффициента диффузии при температуре $T_{cat} - D(T_{cat}) = 0.035$ см²/с. Экстраполированное значение коэффициента диффузии (рис.12) равно 0.043 ± 0.01 см²/с. Учитывая, что параметры μ и Ω_B^2/ω_L^2 не столь уж малы, ошибку в 20%

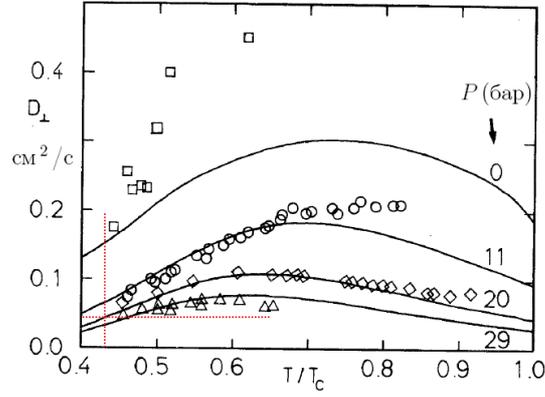


Рис. 15.

Зависимость поперечной компоненты тензора диффузии $D_{\perp}(T)$ от температуры для частоты 460 кГц при разных давлениях [31]

для этого примера следует считать вполне удовлетворительной.

Несмотря на то, что значение коэффициента диффузии при низких температурах неизвестно, мы можем проверить правильность зависимости температуры катастрофической релаксации от параметра ω_L/Ω_B в пределе низких температур. Используя уравнение (1.57) для резонанса $\omega_2(k) + \omega_3(-k) = 2\omega_p$ и низкотемпературную зависимость коэффициента диффузии (1.58), можно получить:

$$\frac{\Delta}{T_{cat}} = 2 \ln \frac{\omega_L}{\Omega_B} + C, \quad (1.66)$$

где C неизвестный коэффициент. Левая часть равенства (1.66) может быть взята из эксперимента [21]. Используемое авторами определение T_{cat} как температуры, при которой время жизни ОПД равняется половине от максимального, не подходит к нашему рассмотрению. Будем считать за T_{cat} температуру, при которой время жизни ОПД начинает уменьшаться (рис.10.). Эксперимент [21] проводился при давлении $P = 31$ Бар, поэтому в левой части (1.66) можно положить $\Delta = \Delta(0) = 2.1k_B T_c$, а в правой части $\Omega_B = 2\pi \cdot 300 \cdot 10^3$ 1/с. Результат сравнения теоретической зависимости T_{cat} от ω_L/Ω_B с экспериментальными данными представлен на рисунке 11, из которого видно, что теоретическая зависимость в пределе низких температур достаточно хорошо согласуется с экспериментом. Несоответствие для самой нижней экспериментальной точки может объяснять-

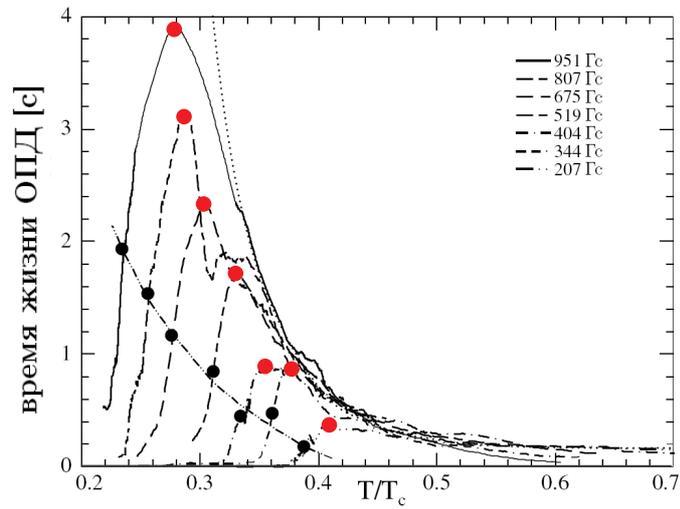


Рис. 16.

Определение температуры катастрофической релаксации из экспериментальных данных по времени жизни ОПД [21]. Черные кружочки – определение, используемое авторами [21]. Красные кружочки соответствуют нашему определению, по которому T_{cat} задается как температура, при которой время жизни ОПД начинает уменьшаться

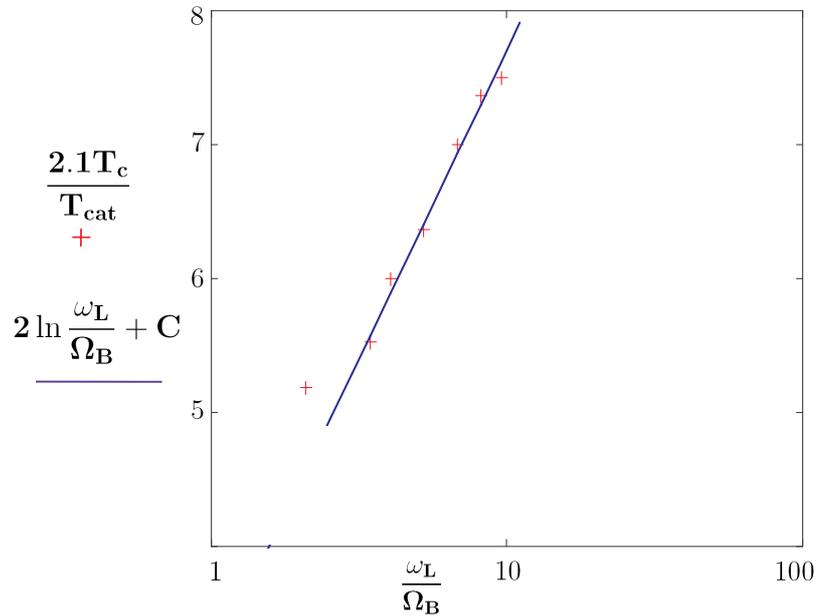


Рис. 17.

Сравнение полученной в пределе низких температур зависимости T_{cat} от параметра ω_L/Ω_B с экспериментальными данными. По оси абсцисс использован логарифмический масштаб с основанием 10. Сплошной линией обозначена теоретическая кривая, где константа $C = 3.1$. Крестиками обозначены экспериментальные точки, вычисленные при помощи рис.10.

ся тем, что эта точка получена для самой высокой температуры ($0.38T_c$) и для нее уже возможно начало перехода от низкотемпературного предела к более сложной функции для коэффициента диффузии. Полученная в ходе подгонки константа $C = 3.1$ соответствует коэффициенту диффузии $D = 0.015 \text{ см}^2/\text{с}$ для давления 31 Бар и магнитного поля 142 Гс при $T = 0.4T_c$.

Отдельно рассмотрим возможность существования ОПД для сверхтекучего ^3He в аэрогеле при гораздо более низких температурах, чем в чистом $^3\text{He} - B$. Как уже было сказано во введении в аэрогеле реализуется B -подобная фаза, параметр порядка которой такой же как и у объемной фазы. Поэтому все вычисления проделанные в данной главе применимы и в этом случае. Однако необходимо учесть две особенности возникающие в присутствии аэрогеля. Во-первых, из-за наличия примесей происходит частичное подавление щели в спектре квазичастиц по сравнению с чистым случаем. Как следствие, при одном и том же значении T/T_c и T/T_{ca} , где T_{ca} - температура сверхтекучего перехода в аэрогеле, примерно в два раза уменьшаются леггеттовская частота Ω_B и скорость спиновых волн c_{\parallel} . Вторая существенная особенность, касается коэффициента диффузии. Как было показано авторами в работе [?] при достаточно низких температурах характерное время диффузионного рассеяния τ_D определяется исключительно рассеянием квазичастиц на нитях аэрогеля, $\tau_D \rightarrow l_{tr}/v_F$, где l_{tr} - средняя геометрическая длина свободного пробега, определяемая аэрогелем, v_F - скорость Ферми. Из этого следует, что при низких температурах ($T \sim 1 \text{ мК}$) коэффициент спиновой диффузии перестает зависеть от температуры и равен некоторой константе. Для давления 29 бар эта константа равна $2 \div 3 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$, а для нулевого давления примерно $6 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$. Важно отметить, что найденный коэффициент диффузии относится к гидродинамическому случаю, так как длина свободного пробега $l_{tr} = 140 \text{ нм}$ гораздо меньше характерных длин спиновых волн $\lambda \sim 10^4 \text{ нм}$. Суммируя все вышесказанного, мы видим, что критическое значение коэффициента диффузии в аэрогеле, определяющее

начало развития неустойчивости, существенно уменьшается из-за уменьшения Ω_B и $c_{\parallel} - D(T_{cat}) \sim 10^{-3} \text{см}^2/\text{с}$, в то время, как измеренный коэффициент диффузии не сильно отличается от этого значения. С той точностью, с которой делается эта оценка можно утверждать, что для B -подобной фазы практически во всей области температур мы находимся вблизи границы возможного начала развития неустойчивости.

1.9 Выводы

В данной главе было показано, что катастрофическая релаксация может быть объяснена в рамках уравнений Леггетта, без каких-то бы ни было дополнительных предположений. Основным результатом является то, что суловская неустойчивость ограничивает снизу по температуре область, в которой возможна реализация когерентной прецессии в ${}^3\text{He} - B$. Найденный здесь низкотемпературный предел устойчивости прецессии обусловлен взаимодействием прецессии со спиновыми волнами в объеме гелия. Представленный механизм возникает из-за совместного влияния анизотропии скоростей спиновых волн и дипольной энергии. Нами было показано, что инкремент нарастания амплитуды спиновых волн не равен нулю при всех значениях угла отклонения намагниченности β . Для случая ОПД, то есть в окрестности угла 104° , максимальный инкремент соответствует комбинированному резонансу, в котором участвуют спиновые волны двух поперечных мод спиновых колебаний. Прецессия с углами $\beta < 104^\circ$ менее устойчива, чем ОПД, потому что помимо объемного механизма неустойчивости появляется добавка в инкремент из-за поверхностного усиления связи вследствие отклонения параметра порядка от леггеттовской конфигурации. Предсказанная низкотемпературная зависимость T_{cat} от величины магнитного поля согласуется с экспериментальными данными [21]. Тот факт, что ОПД более устойчив, если полностью заполняет ячейку, объясняется с одной стороны тем, что при этом угол β сильно заходит за 104° , уменьшая согласно (1.55) инкремент неустой-

чивости. С другой стороны для начала развития неустойчивости необходимо наличие начального возмущения, которое с большей вероятностью возникает вблизи доменной стенки. Тем не менее стабилизация ОПД путем сильного захода за 104° имеет недостаток из-за того, что при этом сильно увеличивается объемное затухание Леггетта-Такаги. Стоит так же отметить, что существование ОПД в аэрогеле при более низких температурах, чем в чистом ${}^3\text{He} - B$, можно объяснить наличием отличного от диффузии более сильного затухания спиновых волн.

Глава 2

Влияние деформированного аэрогеля на параметр порядка сверхтекучего ${}^3\text{He}$. Модельные вычисления.

2.1 Постановка задачи

Влияние аэрогеля на сверхтекучий ${}^3\text{He}$ может быть описано феноменологически при помощи дополнительного члена в функционале свободной энергии:

$$\Delta F_{GL} = N(0) \int d^3r [\eta_{jl}(\mathbf{r}) A_{\mu j} A_{\mu l}^* + \dots], \quad (2.1)$$

где $N(0)$ – плотность состояний на поверхности Ферми, $A_{\mu j}$ – параметр порядка сверхтекучего ${}^3\text{He}$, $\eta_{ij}(\mathbf{r})$ – произвольный тензор, который описывает локальную анизотропию. Взаимодействие аэрогеля с ${}^3\text{He}$ происходит за счет рассеяния квазичастиц на нитях аэрогеля, поэтому тензор $\eta_{ij}(\mathbf{r})$ сворачивается с орбитальными индексами параметра порядка (латинские буквы). Из условия $t \rightarrow -t$ инвариантности следует, что $\eta_{ij}(\mathbf{r})$ должен быть действительным и симметричным. Небольшие изменения физических свойств сверхтекучего ${}^3\text{He}$ вызванные аэрогелем могут быть выражены через среднее по ансамблю от тензора $\langle \eta_{ij}(\mathbf{r}) \rangle$ и через корреляционную функцию $P_{jlmn}(\mathbf{r}) = \langle \eta_{jl}(0) \eta_{mn}(\mathbf{r}) \rangle - \langle \eta_{jl}(0) \rangle \langle \eta_{mn}(\mathbf{r}) \rangle$. Запишем свободную энергию Гинзбурга-Ландау с учетом дополнительного члена (2.1) с точностью до членов второго порядка по $A_{\mu j}$ в виде:

$$F_{GL} = N(0) \int d^3r \left[\left(\frac{\tau}{3} \delta_{jl} + \frac{1}{3} \eta_{ll}(\mathbf{r}) \delta_{jl} \right) A_{\mu j} A_{\mu l}^* + \left(\eta_{jl}(\mathbf{r}) - \frac{1}{3} \eta_{ll}(\mathbf{r}) \delta_{jl} \right) A_{\mu j} A_{\mu l}^* \right]. \quad (2.2)$$

Как следует из данного выражения изотропная часть усредненного тензора $\langle \eta_{jl} \rangle^I = 1/3 \langle \eta_{ll}(\mathbf{r}) \rangle \delta_{jl}$ описывает подавление температуры сверхтекучего перехода аэрогелем, а его анизотропная часть $\langle \eta_{jl} \rangle^a = \langle \eta_{jl}(\mathbf{r}) \rangle - 1/3 \langle \eta_{ll}(\mathbf{r}) \rangle \delta_{jl}$ описывает ориентационный эффект глобальной анизотропии на параметр порядка.

Зная микроструктуру аэрогеля, можно вычислить тензор $\langle \eta_{jl}(\mathbf{r}) \rangle$. К сожалению воспользоваться точной микроструктурой аэрогеля невозможно из-за его сложного строения и приходится пользоваться различными модельными представлениями.

В данной главе для вычисления указанного среднего аэрогель будет рассматриваться состоящим из набора произвольным образом ориентированных нитей диаметром $d \simeq 3 \div 5$ нм. Этот диаметр лежит в интервале $a \ll d \ll \xi_0$, где a – межатомное расстояние, а $\xi_0 = \hbar v_F / 2\pi k_B T_c$ – корреляционная длина сверхтекучего ${}^3\text{He}$. Данное условие позволяет нам рассматривать нити аэрогеля как "маленькие объекты" и применить теорию Райнера-Вуорио [35], представляющую из себя квазиклассический подход к описанию возмущения параметра порядка, создаваемого маленьким объектом в сверхтекучем ${}^3\text{He}$. Согласно теории Райнера-Вуорио объект влияет на сверхтекучесть за счет рассеяния квазичастиц. Плотность энергии создаваемого объектом возмущающего поля составляет малую часть от плотности энергии конденсации $N(0)\Delta^2$, $\delta F^{(1)} \sim (\sigma/\xi_0^2)N(0)\Delta^2$, где σ – сечение рассеяния на объекте, Δ – щель в спектре квазичастиц, $\sigma/\xi_0^2 \ll 1$. Возмущающий потенциал спадает на расстоянии ξ_0 , поэтому энергия возмущения дается произведением $\delta F^{(1)} \cdot \xi_0^3$. Если рассматривать систему из независимых "маленьких" объектов, то при низкой концентрации объектов энергия возмущения такой системы будет $n\xi_0^3\delta F^{(1)}$, при условии что $n\sigma\xi \ll 1$, где n – концентрация примесей. В работе [36] указанная схема в применении к простой модели аэрогеля была использована для оценки по порядку величины влияния деформированного аэрогеля на состояние с А-подобной фазой. Такие оценки очень чувствительны к выбору параметров, характеризующих систему. С целью сделать оценки менее произвольными, в настоящей работе произведены явные вычисления тензора $\langle \eta_{jl} \rangle$, использующие ту же модель для случая маленьких одноосных деформаций аэрогеля [40]. Помимо ориентационной энергии в рамках данной модели мы нашли также длинноволновый

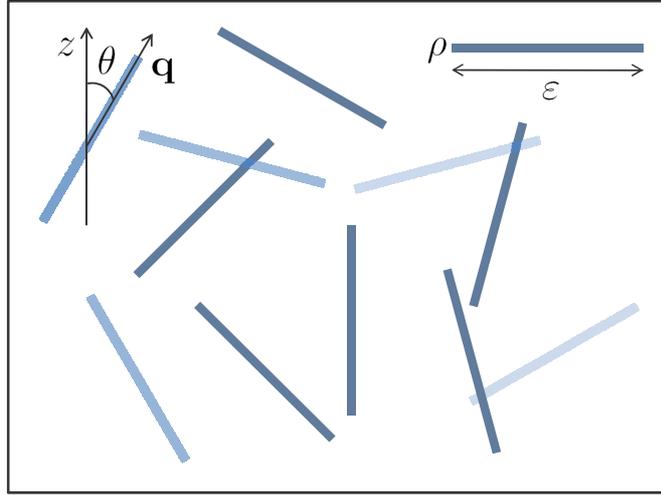


Рис. 18.

Модель аэрогеля

предел Фурье-образа корреляционной функции недеформированного аэрогеля, который описывает длинноволновый предел флуктуаций поля аэрогеля.

2.2 Модель аэрогеля.

При выборе модели аэрогеля мы исходили из следующих соображений. Во первых, для выбранного нами применения теории Райнера-Вуорио необходимо чтобы рассеяние на частицах аэрогеля было анизотропным. Во-вторых, хотелось бы, чтобы в рамках нашей модели можно было описывать сжатие-растяжение аэрогеля через макроскопические параметры теории упругости. Исходя из этого, мы будем предполагать, что аэрогель состоит из цилиндров длиной ε и радиуса ρ , которые равномерно распределены в объеме (рис.11.). Распределение цилиндров по направлениям будем описывать с помощью функции распределения $n(\mathbf{q})$, которая равна числу цилиндров в единичном объеме, ось которых направлена вдоль направления \mathbf{q} . Для недеформированного аэрогеля эта функция изотропна:

$$n(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1 - P}{\rho^2 \varepsilon}, \quad (2.3)$$

где P - пористость аэрогеля. Рассмотрим одноосное сжатие-растяжение "модельного аэрогеля". Выделим некоторый объем, содержащий большое количество цилиндров. Будем считать, что изменение размера выделенного объема в направлении \mathbf{q} пропорционально изменению числа цилиндров в данном направлении, при этом сами цилиндры не деформируются. Таким образом деформация в данной модели описывается изменением среднего расстояния между центрами цилиндров и изменением ориентационной части функции распределения $n(\mathbf{q})$. Для одноосной деформации выразим изменение функции $n(\mathbf{q})$ через упругие модули аэрогеля. Изменение размеров выделенного объема при малой однородной деформации можно записать как [37]:

$$\begin{aligned} dx' &= dx (1 + u_{xx}), \\ dy' &= dy (1 + u_{yy}), \\ dz' &= dz (1 + u_{zz}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где u_{ii} – диагональные компоненты тензора деформации, положительный знак u_{zz} соответствует растяжению вдоль оси z . Для однородной одноосной деформации вдоль оси z имеет место соотношение:

$$u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz}, \quad (2.5)$$

здесь σ – коэффициент Пуассона. Длина в направлении \mathbf{q} изменится как:

$$\delta l(\mathbf{q}) = l(u_{xx} \sin^2 \theta + u_{zz} \cos^2 \theta) = l(\cos^2 \theta - \sigma \sin^2 \theta) u_{zz}, \quad (2.6)$$

где θ – угол между направлением \mathbf{q} и осью z . Исходя из этого, функцию распределения можно записать в виде:

$$n(\mathbf{q}) = \frac{(1 - P)}{2\pi^2 \rho^2 \varepsilon} \cdot (1 + (1 - 2\sigma)u_{zz} + (1 + \sigma)(3 \cos^2(\theta) - 1)u_{zz}). \quad (2.7)$$

Полное число цилиндров в единичном объеме задается первыми двумя членами (2.7), так как интеграл по углам от третьего члена обращается в ноль. Изменение в ориентационном распределении задается третьим членом, пропорциональным второму полиному Лежандра.

2.3 Вычисление возмущения от одного цилиндра

Согласно теории Райнера-Вуорио маленький объект в сверхтекучем ${}^3\text{He}$ увеличивает энергию системы. Это изменение описывается дополнительным членом в свободной энергии [35]:

$$\Delta F^{Obj} = \int d^3r d^3r' A_{\mu j}^*(\mathbf{r}) K_{jl}^{Obj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') A_{\mu l}(\mathbf{r}'). \quad (2.8)$$

Ядро K_{jl}^{Obj} имеет вид:

$$K_{jl}^{Obj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{2\pi N(0)k_B T_c}{\hbar v_F} \sum_n \exp\left(-2|\omega_n| \frac{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| + |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|}{v_F}\right) \times \\ \times \frac{1}{4\pi} \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})_j (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}')_l}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3 |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|^3} \left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{r}_0 \hat{-} \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \hat{-} \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r}_0 \hat{-} \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \hat{-} \mathbf{r}') \sigma_{tot}(\mathbf{r}_0 \hat{-} \mathbf{r}) \right], \quad (2.9)$$

где $\omega_n = (2n + 1)\pi k_B T / \hbar$, \mathbf{r}_0 – координата объекта, $d\sigma/d\Omega$, σ_{tot} – дифференциальное и полное сечение рассеяние квазичастиц на объекте соответственно. Вблизи T_c $A_{\mu j}(\mathbf{r}')$ меняется на расстоянии $\xi(T) \sim \xi_0 \sqrt{\frac{T_c}{T_c - T}} \gg \xi_0$. Разложив $A_{\mu j}(\mathbf{r}')$ около точки \mathbf{r} , и учитывая при этом, что ядро K_{jl}^{Obj} экспоненциально спадает на расстоянии ξ_0 , мы можем, согласно [38], получить тензор η_{jl} в виде:

$$\eta_{jl}(\mathbf{r}) = \frac{1}{N(0)} \int d^3r' K_{jl}^{Obj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2.10)$$

Для того, чтобы применить (2.9) для кусочка нити длиной $\varepsilon \sim \xi_0$, необходимо этот кусочек разделить на элементы длиной $\delta\varepsilon \ll \xi_0$. Если среднее расстояние между нитями ξ_a , то возмущение параметра порядка, вызванное одним элементом на расстоянии ξ_a , будет мало и иметь порядок $\rho\delta\varepsilon/\xi_a^2$. Ответ для целого кусочка нити в главном порядке по ρ/ξ_a может быть найден путем суммирования вкладов от всех элементов. При этом условие экспоненциального спада ядра K_{jl}^{Obj} на расстоянии ξ_0 и то, что $\varepsilon \sim \xi_0$ обеспечивают, чтобы эта сумма осталась маленькой поправкой к невозмущенному параметру порядка. Условие малости нарушается вблизи самой нити, однако вклад этой области в интеграл (2.10) порядка $\sim \rho^2/\xi_0^2$, и поэтому не вносит значительной ошибки. Вклад в

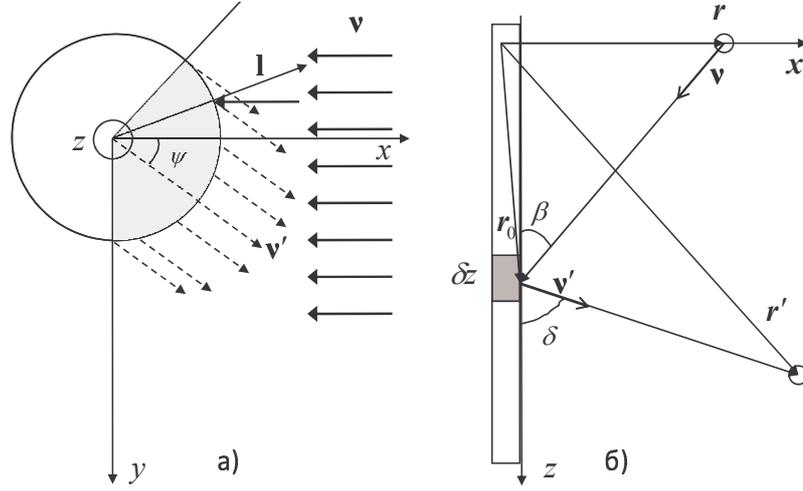


Рис. 19. а) - рассеяние квазичастиц на нити, вид сверху; серым обозначена область углов, излучающая в направлении ψ б) - система координат, вид сбоку

$\eta_{jl}(\mathbf{r})$ от всех нитей в главном порядке по концентрации находится суммированием вкладов от каждого кусочка нити в отдельности. Поперечные сечения $d\sigma/d\Omega$ и σ_{tot} , входящие в (2.9) зависят от типа рассеяния квазичастиц на нитях аэрогеля. Мы рассмотрим диффузное и зеркальное рассеяние как два крайних случая.

Вычислим вначале тензор $\eta_{jl}(\mathbf{r})$ для одного цилиндра для случая диффузного рассеяния квазичастиц на цилиндре. Напомним, что диффузным рассеянием по определению называется рассеяние, при котором вероятность отражения частицы в заданный телесный угол не зависит от направления этого угла. Введем систему координат, как показано на рисунке 13. Дифференциальное сечение диффузного рассеяния квазичастиц на элементе нити δz в заданной системе координат имеет вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\nu, \nu') = \rho \cdot \delta z \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{1 + \cos(\psi)}{2\pi}, \quad (2.11)$$

где $\nu = \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} = (-\sin \beta, 0, \cos \beta)$ – направление падения квазичастицы, β – угол падения, $\nu' = \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} = (\sin \delta \cos \psi, \sin \delta \sin \psi, \cos \delta)$ – направление отражения квазичастицы. Полное сечение рассеяния, получающееся после интегрирования

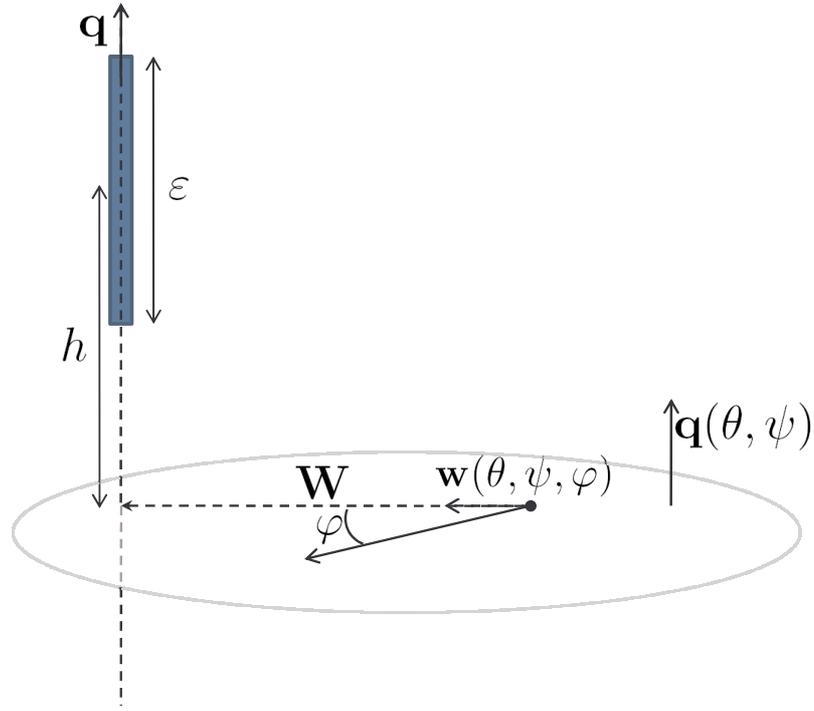


Рис. 20. Задание ориентации одного цилиндра относительно точки \mathbf{r}

по углам, записывается как:

$$\sigma_{tot} = 2\rho \sin(\beta)\delta z. \quad (2.12)$$

Положение цилиндра относительно произвольной точки \mathbf{r} будем задавать длиной перпендикуляра \mathbf{W} , опущенного из точки \mathbf{r} на ось цилиндра и расстоянием h от середины цилиндра до точки пересечения оси цилиндра с плоскостью перпендикулярной оси цилиндра и проходящей через точку \mathbf{r} (рис. 14). После подстановки выражений для сечений в (2.9),(2.10) и интегрирования по δz получим следующее выражение для вклада от одного цилиндра в точке \mathbf{r} – $\eta_{jl}^1(\mathbf{r})$:

$$\eta_{jl}^1(h, W) = w_j w_l \cdot \eta_x^1(h, W) + q_j q_l \cdot \eta_z^1(h, W), \quad (2.13)$$

\mathbf{q} – единичный вектор направленный вдоль оси цилиндра, \mathbf{w} – единичный вектор, направленный вдоль перпендикуляра \mathbf{W} . Для диффузного рассеяния функ-

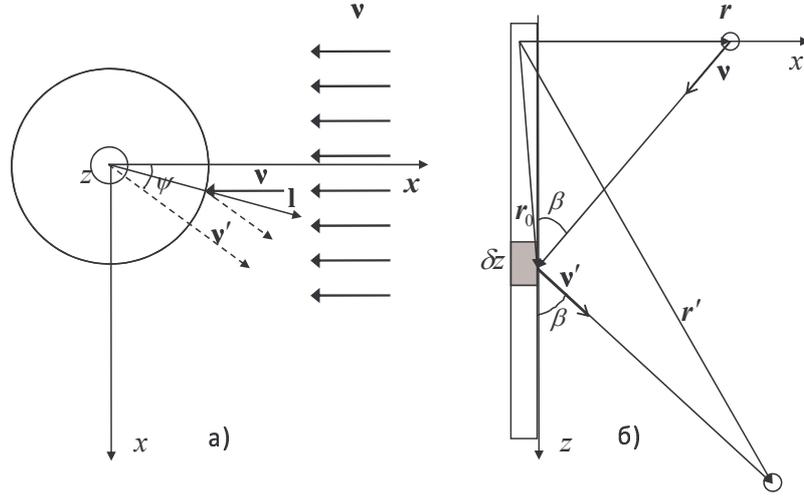


Рис. 21. Зеркальное рассеяние квазичастиц на элементе цилиндра δz , вид сверху

ции $\eta_x^1(h, W)$ и $\eta_z^1(h, W)$ задаются следующими выражениями:

$$\eta_x^{1d}(h, W) = \int_{h/2\xi_0 - \varepsilon/4\xi_0}^{h/2\xi_0 + \varepsilon/4\xi_0} \frac{\rho}{\xi_0} \cdot \frac{\alpha^2}{(\zeta^2 + \alpha^2)^2} \ln \left(\tanh(\zeta^2 + \alpha^2)^{1/2} \right) \cdot \left[-\frac{1}{32} - \frac{\alpha}{4\pi(\zeta^2 + \alpha^2)^{1/2}} \right] d\zeta, \quad (2.14)$$

$$\eta_z^{1d}(h, W) = - \int_{h/2\xi_0 - \varepsilon/4\xi_0}^{h/2\xi_0 + \varepsilon/4\xi_0} \frac{1}{4\pi} \frac{\rho}{\xi_0} \cdot \frac{\alpha\zeta^2}{(\zeta^2 + \alpha^2)^{5/2}} \ln \left(\tanh(\zeta^2 + \alpha^2)^{1/2} \right) d\zeta, \quad (2.15)$$

где $\alpha = W/(2\xi_0)$.

Сечение рассеяния на элементе цилиндра δz для зеркальных граничных условий имеет вид (рис.15):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho\delta z}{2} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin(\beta) \delta(\nu_z' - \nu_z). \quad (2.16)$$

Отличие зеркального рассеяния от диффузного в нашем случае заключается в том, что в тензоре $\eta_{jl}^1(\mathbf{r})$ присутствует только компонента перпендикулярная оси цилиндра:

$$\eta_x^{1s}(h, W) = -\frac{1}{3\pi} \int_{h/2\xi_0 - \varepsilon/4\xi_0}^{h/2\xi_0 + \varepsilon/4\xi_0} \frac{\rho}{\xi_0} \cdot \frac{\alpha^3}{(\zeta^2 + \alpha^2)^{5/2}} \ln \left(\tanh(\zeta^2 + \alpha^2)^{1/2} \right) dx. \quad (2.17)$$

Такая особенность тензора $\eta_{jl}^1(\mathbf{r})$ аналогична тому, что при зеркальном отражении квазичастиц от стенки продольная компонента параметра порядка не подавляется [39].

2.4 Усреднение по ансамблю цилиндров

В главном приближении по концентрации вклад от всех цилиндров в точке \mathbf{r} будет даваться выражением:

$$\eta_{jl}(\mathbf{r}) = \sum_N \eta_{jl}^N(\mathbf{W}^N, h^N, \mathbf{q}^N), \quad (2.18)$$

где N – номер цилиндра. Для описания изменения физических свойств 3He , вызванных аэрогелем, необходимо найти среднее по ансамблю от тензора $\eta_{jl}(\mathbf{r})$ – $\langle \eta_{jl} \rangle$. Для однородного распределения цилиндров с заданной функцией распределения цилиндров по направлениям $n(\mathbf{q})$ указанное среднее можно записать как:

$$\langle \eta_{jl} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dh \int_0^{\infty} W dW \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \cdot n(\theta, \psi) \cdot \eta_{jl}(W, h, \theta, \psi, \phi), \quad (2.19)$$

где углы θ, ψ задают плоскость, проходящую через точку \mathbf{r} и число перпендикулярных ей нитей $n(\theta, \psi)$, угол ϕ – задает направление вектора \mathbf{w} в указанной плоскости (рис.14). Интегрирование по h, W, ϕ – это усреднение по объему (цилиндрические координаты), а интегрирование по θ, ψ – это усреднение по направлениям. Если

$$\mathbf{q}(\theta, \psi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{w}(\theta, \psi, \phi) = \begin{pmatrix} -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \cos \psi \sin \phi \\ \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \psi \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

В пределе низкой концентрации примесей среднее поле $\langle \eta_{jl} \rangle$ определяется полной длиной нитей аэрогеля, т.е. не зависит от длины отдельных цилиндров ε . Вычисление интегралов при помощи стандартной компьютерной программы показывает, что данное условие начинает выполняться при $\varepsilon \geq 0.002\xi_0$. В этом случае при вычислении среднего поля для $\varepsilon \sim \xi_0$ можно перейти к пределу

$\varepsilon \rightarrow \infty$, тогда все интегралы, входящие в (2.19), могут быть вычислены аналитически. Для изотропной части тензора η_{jl} получается следующее выражение:

$$\langle \eta_{jl} \rangle^I = \frac{8}{3}(X + Z) \frac{(1 - P)\xi_0}{\rho} \delta_{jl}. \quad (2.21)$$

Анизотропная часть тензора для одноосной деформации может быть записана как:

$$\kappa \equiv -\langle \eta_{xx} \rangle^a = -\langle \eta_{yy} \rangle^a = 1/2 \langle \eta_{zz} \rangle^a = \frac{8(1 + \sigma)}{15}(X - 2Z) \frac{(1 - P)\xi_0}{\rho} u_{zz}. \quad (2.22)$$

Коэффициенты X, Z , входящие в (2.21), (2.22), выражаются через интегралы:

$$X = \int_0^\infty \eta_x^1 \alpha d\alpha, \quad Z = \int_0^\infty \eta_z^1 \alpha d\alpha. \quad (2.23)$$

Для диффузного рассеяния получается:

$$X^D = \frac{13\pi^2}{768}, \quad Z^D = \frac{\pi^2}{256}, \quad (2.24)$$

а для зеркального:

$$X^S = \frac{\pi^2}{64}, \quad Z^S = 0. \quad (2.25)$$

Подставляя (2.24) в (2.21,2.22) получим для диффузного рассеяния в главных приближениях по концентрации и деформации:

$$\langle \eta_{jl} \rangle^I = \frac{\pi^2 (1 - P)\xi_0}{18 \rho} \delta_{jl}, \quad \kappa^D = -\frac{7}{10} \left(\frac{\pi}{12} \right)^2 \frac{(1 + \sigma)(1 - P)\xi_0}{\rho} u_{zz}. \quad (2.26)$$

Зная $\langle \eta_{jl} \rangle^I$ можно в первом порядке по концентрации определить сдвиг температуры перехода по формуле:

$$\frac{\Delta T}{T_c} = -\langle \eta_{ii} \rangle^I = \frac{\pi^2 (1 - P)\xi_0}{6 \rho}. \quad (2.27)$$

Полученное выражение совпадает с ответом для модели однородно распределенных в пространстве шариков [38] при учете того, что отношение занимаемого примесями объема к полной площади поверхности примесей одинаково в двух моделях.

Аналогичным образом для зеркального рассеяния тензор $\langle \eta_{jl} \rangle$ имеет вид:

$$\langle \eta_{jl} \rangle^I = \frac{\pi^2 (1 - P) \xi_0}{24 \rho} \delta_{jl}, \quad \kappa^S = -\frac{\pi^2 (1 + \sigma)(1 - P) \xi_0}{120 \rho} u_{zz}. \quad (2.28)$$

Таким образом, если сравнивать с диффузным рассеянием, анизотропная поправка к тензору $\langle \eta_{jl} \rangle$ при зеркальном рассеянии примерно в 1.7 раз больше, при этом температура перехода подавляется чуть меньше.

2.5 Вычисление корреляционной функции

Поправки к параметру порядка, вызванные флуктуациями в расположении примесей, могут быть выражены через Фурье образ корреляционной функции недеформированного аэрогеля при $k \rightarrow 0$, т.е. $\int P_{jlmn}(\mathbf{r}) d^3 r$ [14]. Напомним, что

$$P_{jlmn}(\mathbf{r}) = \langle \eta_{jl}(\mathbf{r}') \eta_{mn}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) \rangle - \langle \eta_{jl}(\mathbf{r}') \rangle \langle \eta_{mn}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) \rangle. \quad (2.29)$$

Используя свойство (2.18) и предположение об однородности распределения цилиндров, можно выразить $P_{jlmn}(\mathbf{r})$ через парное среднее от поля одного цилиндра:

$$P_{jlmn}(\mathbf{r}) = \int \eta_{jl}^1(\mathbf{r}') \eta_{mn}^1(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) n(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (2.30)$$

Для вычисления $P_{jlmn}(\mathbf{r})$ необходимо использовать анизотропную часть тензора $\eta_{jl}^a(\mathbf{r}) = \eta_{jl}(\mathbf{r}) - 1/3 \eta_{mm}(\mathbf{r}) \delta_{jl}$ и изотропную функцию распределения цилиндров. В этом случае из симметричных соображений Фурье образ корреляционной функции при $k \rightarrow 0$ может быть записан как:

$$\int P_{jlmn}(\mathbf{r}) d^3 r = \Phi_0 (\delta_{jm} \delta_{ln} + \delta_{jn} \delta_{lm} - \frac{2}{3} \delta_{jl} \delta_{mn}). \quad (2.31)$$

При вычислении $\int P_{jlmn}(\mathbf{r}) d^3 r$ воспользуемся тем, что из-за того, что интегрирование происходит по всему пространству, интегрирование по \mathbf{r} и \mathbf{r}' можно

произвести независимо друг от друга (рис.16):

$$\begin{aligned}
& \int P_{jlmn}(\mathbf{r}') d^3 r' = \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} dh \int_{-\infty}^{+\infty} dh' \int_0^{\infty} W dW \int_0^{\infty} W' dW' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\pi} d\psi \cdot \\
& \left((w'_j w'_l - \frac{1}{3} \delta_{jl}) \cdot \eta_x^1(h', W') + (q_j q_l - \frac{1}{3} \delta_{jl}) \cdot \eta_z^1(h', W') \right) \cdot \\
& \left((w_m w_n - \frac{1}{3} \delta_{mn}) \cdot \eta_x^1(h, W) + (q_m q_n - \frac{1}{3} \delta_{mn}) \cdot \eta_z^1(h, W) \right) \cdot n(\theta, \psi).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Переходя в интегралах для $\eta_x^1(h, W), \eta_z^1(h, W)$ к пределу $\varepsilon \rightarrow \infty$, после интегрирования по W, W' получим:

$$\begin{aligned}
& \int P_{jlmn}(\mathbf{r}') d^3 r' = \varepsilon \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\pi} d\psi \cdot \\
& \left((w'_j w'_l - \frac{1}{3} \delta_{jl}) \cdot X + (q_j q_l - \frac{1}{3} \delta_{jl}) \cdot Z \right) \cdot \\
& \left((w_m w_n - \frac{1}{3} \delta_{mn}) \cdot X + (q_m q_n - \frac{1}{3} \delta_{mn}) \cdot Z \right) \cdot n(\theta, \psi).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

После вычисления одной из компонент указанного тензора можно найти Φ_0 :

$$\Phi_0 = \frac{32\pi}{15} \varepsilon \xi_0^2 (X - 2Z)^2 (1 - P). \tag{2.34}$$

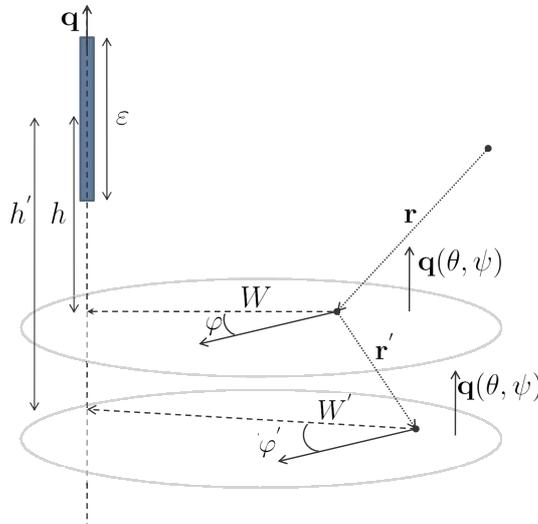


Рис. 22. Координаты используемые при интегрирование в (2.32)

Подставляя значения констант X и Z для диффузного рассеяния получим:

$$\Phi_0^D = \frac{49}{270} \left(\frac{\pi}{4}\right)^5 \varepsilon \xi_0^2 (1 - P) \approx 0.054 \varepsilon \xi_0^2 (1 - P). \quad (2.35)$$

Аналогично для зеркального рассеяния:

$$\Phi_0^S = \frac{8}{15} \left(\frac{\pi}{4}\right)^5 \varepsilon \xi_0^2 (1 - P) \approx 0.159 \varepsilon \xi_0^2 (1 - P). \quad (2.36)$$

2.6 Результаты

Наиболее очевидно эффект анизотропии проявляется для АБМ-фазы сверхтекучего ${}^3\text{He}$, параметр порядка которой имеет вид:

$$A_{\mu j} = \frac{\Delta}{\sqrt{2}} d_{\mu} (m_j + i n_j), \quad (2.37)$$

где Δ – амплитуда параметра порядка, вектор \mathbf{d} соответствует спиновой части параметра порядка, а $\mathbf{l} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$ – орбитальной. После подстановки (2.37) в (2.2) и усреднения по ансамблю частей аэрогеля получим следующее выражение для ориентационной энергии:

$$f_l = -\frac{N(0)\Delta^2}{2} \langle \eta_{ij}^a \rangle^a l_i l_j. \quad (2.38)$$

При получении этого выражения мы воспользовались тем, что

$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \delta_{ij}$ и тем, что $\langle \eta_{jj}^a \rangle = 0$. Для рассмотренной модели при диффузном рассеянии указанная энергия равна:

$$E_l^D = -\frac{7}{20} \left(\frac{\pi}{12}\right)^2 N(0)\Delta^2 \frac{(1 + \sigma)(1 - P)\xi_0}{\rho} u_{zz} (1 - 3l_z^2), \quad (2.39)$$

где l_z – проекция орбитального вектора $\mathbf{l} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$ на ось z . Для зеркального рассеяния ориентационная энергия получается:

$$E_l^S = \frac{\pi^2}{240} N(0)\Delta^2 \frac{(1 + \sigma)(1 - P)\xi_0}{\rho} u_{zz} (1 - 3l_z^2). \quad (2.40)$$

Найдем граничную деформацию $\gamma_c = \Delta l_z / l_z$ разделяющую состояние с АБМ-фазой от состояния с критической флуктуаций. Переход между двумя состояниями ожидается в момент, когда флуктуационные поправки к уравнениям,

определяющие форму параметра порядка, становятся сравнимыми с Δ^2 . В этом случае описание в рамках теории Ландау становится неприменимым и возможно возникновение разупорядоченных состояний типа Имри-Ма состояния. Согласно результату работы [14] это происходит, когда

$$g_\kappa = \frac{\Phi_0}{\xi_0^3 \sqrt{\kappa}} \sim 1. \quad (2.41)$$

Написанный здесь параметр равен отношению квадрата амплитуды поперечных флуктуаций, т.е. тех, которые соответствуют повороту параметра порядка, к квадрату амплитуды среднего параметра порядка. Используя выражения для κ и Φ_0 (2.22),(2.34) получим для граничной деформации:

$$\gamma_c = \frac{128\pi^2}{15} (2Z - X)^3 \frac{\rho}{\xi_0} \frac{\varepsilon^2}{\xi_0^2} (1 - P). \quad (2.42)$$

В среднем аэрогель описывается двумя величинами – пористостью P и отношением поверхности к полному объему аэрогеля. Исходя из этого при нашем описании есть только один независимый размер. Выберем в качестве такой величины радиус нити. Тогда логично считать, что средний размер цилиндров ε должен быть порядка среднего расстояния между нитями ξ_a , при этом само ξ_a может быть найдено из соотношения:

$$(1 - P) = \frac{\pi\rho^2}{\xi_a^2}. \quad (2.43)$$

Таким образом граничную деформацию можно переписать в виде:

$$\gamma_c = \frac{128\pi^3}{15} (2Z - X)^3 \frac{\rho^3}{\xi_0^3}. \quad (2.44)$$

Зависимость граничной деформации от параметров совпадает с полученной в работе [36]. Однако целью настоящей работы было уточнение указанного результата в рамках заданной модели. Подставляя значения параметров X и Z для диффузного и зеркального рассеяний получим:

$$\gamma_c^D \approx 0.2 \frac{\rho^3}{\xi_0^3}, \quad (2.45)$$

$$\gamma_c^S \approx 0.9 \frac{\rho^3}{\xi_0^3}. \quad (2.46)$$

Как видно из результатов зеркальное отражение дает более высокий предел для граничной деформации γ_c , однако даже в этом случае он на порядок меньше простой оценки [36]. Для высоких давлений можно положить $\rho/\xi_0 \sim 0.1$, в этом случае граничная деформация лежит в интервале $10^{-3} \div 10^{-4}$.

Представленные вычисления основаны на простой модели аэрогеля, поэтому они не могут претендовать на хорошее количественное описание свойств аэрогеля. Тем не менее найденное влияние глобальной анизотропии на подавление критических флуктуаций вряд ли является артефактом модели.

Глава 3

Влияние одноосно-деформированного аэрогеля на ориентацию параметра порядка сверхтекучего ^3He . Эффект корреляций.

3.1 Эффект корреляций

Во второй главе была произведена попытка описать эффект влияния анизотропии аэрогеля на ориентацию параметра порядка, основанная на модели, в которой аэрогель считался состоящим из одинаковых цилиндров однородно распределенных в пространстве. При таком рассмотрении в систему неявным образом вводилась корреляция в расположении близлежащих частиц образующих аэрогель. Такое рассмотрение является довольно грубым приближением для аэрогеля. Цель третьей главы - описать влияние одноосной деформации аэрогеля на ориентацию параметра порядка ^3He при помощи явного задания корреляций в расположении частиц, образующих аэрогель. Недавно Фомин рассмотрел влияние таких корреляций на температуру перехода в сверхтекучее состояние [9]. В рамках предложенного в указанной статье подхода в данной главе будет рассмотрено влияние анизотропии аэрогеля на ориентацию параметра порядка [41].

3.2 Уравнение Гинзбурга-Ландау

В дальнейшем ограничимся рассмотрением области температур вблизи объемной температуры перехода T_b , т.е. будем предполагать, что относительное изменение температуры сверхтекучего перехода мало, $\tau_{ba} = \frac{T_b - T_a}{T_b} \ll 1$, где T_a - температура возникновения дальнего порядка в ^3He в аэрогеле. В этой области

для наших целей можно использовать линеаризованное уравнение Гинзбурга-Ландау, полученное из разложения свободной энергии по степеням параметра порядка около *объемной температуры перехода* T_b :

$$F_{GL} = N(0) \int d^3r \left(\tau A_{\mu j} A_{\mu j}^* + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^5 \beta_s I_s + f_{\nabla} + \eta_{jl}(\mathbf{r}) A_{\mu j} A_{\mu l}^* \right), \quad (3.1)$$

где $\tau = \frac{T-T_b}{T_b}$, $A_{\mu j}$ - комплексная матрица 3×3 , $\eta_{jl}(\mathbf{r})$ - симметричный действительный тензор, характеризующий взаимодействие примесей с параметром порядка сверхтекучего ${}^3\text{He}$, I_s - инварианты четвертого порядка. Коэффициенты β_1, \dots, β_5 - феноменологические константы. Градиентная энергия f_{∇} имеет вид:

$$f_{\nabla} = K_1 \nabla_j A_{\mu l} \nabla_j A_{\mu l}^* + K_2 \nabla_j A_{\mu l} \nabla_l A_{\mu j}^* + K_3 \nabla_j A_{\mu j} \nabla_l A_{\mu l}^*, \quad (3.2)$$

здесь K_1, K_2, K_3 - феноменологические константы. Для решения поставленной задачи можно пренебречь членами четвертого порядка, после чего уравнение Гинзбурга-Ландау можно записать как:

$$-\tau A_{\mu j}(\mathbf{r}) + A_{\mu l}(\mathbf{r}) \eta_{jl}(\mathbf{r}) - \frac{3}{5} \xi_s^2 \left(\frac{\partial^2 A_{\mu j}(\mathbf{r})}{\partial x_l^2} + 2 \frac{\partial^2 A_{\mu l}(\mathbf{r})}{\partial x_j \partial x_l} \right) = 0, \quad (3.3)$$

$\xi_s^2 = \frac{7\zeta(3)}{12} \xi_0^2 \approx 0.7 \xi_0^2$. Перепишем (3.3) в импульсном представлении, для этого умножим уравнение на $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ и проинтегрируем по d^3r . В результате получим:

$$\left(\tau \delta_{jl} - \frac{3}{5} \xi_s^2 k^2 (\delta_{jl} + 2k_j k_l) \right) a_{\mu l}(\mathbf{k}) = \int a_{\mu l}(\mathbf{q}) \eta_{jl}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}, \quad (3.4)$$

$$A_{\mu j}(\mathbf{r}) = \int a_{\mu j}(\mathbf{q}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}, \quad \eta_{jl}(\mathbf{r}) = \int \eta_{jl}(\mathbf{q}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}.$$

Конкретный вид тензора $\eta_{jl}(\mathbf{r})$ зависит от строения аэрогеля и вида рассеяния квазичастиц на частицах образующих аэрогель. Для простоты будем считать аэрогель состоящим из одинаковых шариков с радиусом ρ , распределенных в пространстве со средней плотностью n , а рассеяние диффузным. Как уже делалось в Главе 2., для низкой концентрации частиц аэрогеля тензор $\eta_{jl}(\mathbf{r})$ может

быть представлен в виде:

$$\eta_{jl}(\mathbf{r}) = \sum_s \eta_{jl}^1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s), \quad (3.5)$$

где s - номер частицы, а тензор $\eta_{jl}^1(\mathbf{r})$ находится с помощью теории Райнера и Вуорио для малых объектов в сверхтекучем 3He [35],

$$\eta_{jl}^1(\mathbf{r}) = -\frac{\rho^2}{r^2} \nu_j \nu_l \ln \left[\tanh \left(\frac{r}{2\xi_0} \right) \right]. \quad (3.6)$$

Согласно (3.6) тензор $\eta_{jl}(\mathbf{r})$ спадает на расстояниях $\sim \xi_0$. При $r < \xi_0$ $\eta_{jl}(\mathbf{r}) \sim (\rho/\xi_0)^2$, поэтому правую часть уравнения (3.4) можно рассматривать как возмущение.

Для того, чтобы найти ориентационную поправку к свободной энергии необходимо решить задачу об отыскании собственных значений уравнения (3.4). Собственные значения уравнения (3.4) без учета возмущения в правой части являются вырожденными, т.е. различным орбитальным индексам соответствует одна и та же температура перехода. В работе [9] рассматривался случай изотропного аэрогеля. При учете такого возмущения собственные значения уравнения Гинзбурга-Ландау оставались вырожденными. Наличие в системе анизотропного возмущения, связанного с одноосно-деформированным аэрогелем, частично снимает данное вырождение. В результате решения секулярного уравнения теории возмущений возникнут поправки к температуре перехода, которые будут соответствовать "продольной" (вдоль направления деформации) и "поперечной" температурам перехода. Таким образом в свободной энергии появится член с тензором температуры перехода, диагональные члены которого найдутся из решения секулярного уравнения. После выделения изотропного вклада в температуру перехода ориентационный член в свободной энергии может быть представлен в виде:

$$\tau_{jl}^a A_{\mu j} A_{\mu l}^*, \quad (3.7)$$

$\tau_{ll}^a = 0$. Для решения поставленной задачи будем использовать метод Гриновских функций.

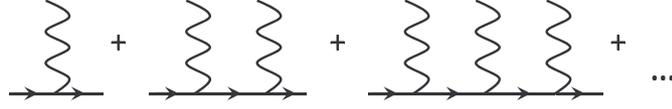


Рис. 23.

3.3 Функция Грина

Функцией Грина G линейного оператора \hat{L} по определению называется решение уравнения $\hat{L}f(x) = \delta(x-x_0)$. При таком определении полюса функции Грина будут соответствовать собственным значениям оператора \hat{L} . Для уравнения (3.3) функция Грина будет тензором, удовлетворяющим уравнению:

$$\left[(-\tau\delta_{jl} + \eta_{jl}(\mathbf{r}) - \frac{3}{5}\xi_s^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \right)) \right] G_{\mu l}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) = \delta_{\mu j} \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.8)$$

В импульсном представлении это уравнений можно переписать в следующем виде:

$$\left(\tau\delta_{jl} - \frac{3}{5}\xi_s^2 k^2 (\delta_{jl} + 2k_j k_l) \right) G_{\mu l}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \tau) - \int G_{\mu l}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \tau) \eta_{jl}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} = (2\pi)^3 \delta_{\mu j} \cdot \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3.9)$$

В нулевом приближении по возмущению, т.е. когда $\eta_{jl}(\mathbf{k}) = 0$, тензор Гриновской равен:

$$\left(G_{\mu l}^{(0)}(\tau, \mathbf{k}, \mathbf{k}') \right) = (2\pi)^3 \delta_{\mu j} \cdot \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left(\tau\delta_{jl} - \frac{3}{5}\xi_s^2 k^2 (\delta_{jl} + 2k_j k_l) \right)^{-1}, \quad (3.10)$$

и после простых преобразований получим:

$$\left(G_{jl}^{(0)}(\tau, \mathbf{k}, \mathbf{k}') \right) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left(\frac{\delta_{jl}}{\tau - \frac{3}{5}\xi_s^2 k^2} + \frac{\frac{6}{5}\xi_s^2 k^2}{\tau - \frac{3}{5}\xi_s^2 k^2} \cdot \frac{k_j k_l}{\tau - \frac{9}{5}\xi_s^2 k^2} \right). \quad (3.11)$$

Отметим, что выражение (3.11) в отличие от соответствующего выражения [9] уже не пропорционально δ_{jl} , а является более сложным тензором.

Решая уравнение (3.9) методом последовательных приближений, функцию Грина можно записать в виде ряда представленного на рис.23. Стрелками на

рисунке обозначаются невозмущенные функции Грина $G_{jl}^{(0)}(\tau, \mathbf{k})$, которые задаются формулой (3.11) без множителя $(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, волнистые линии соответствуют Фурье-образу примесного потенциала $\eta_{jl}(\mathbf{r})$:

$$\eta_{jl}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \eta_{jl}^1(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \sum_s e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}_s}. \quad (3.12)$$

Интегрирование в членах начиная со второго предполагается по внутренним импульсам. Первый член соответствует эффекту от однократного рассеяния квазичастицы на примеси, второй член эффекту от двукратного рассеяния на одной или двух примесях, третий от трехкратного и т.д. Усредним функцию Грина по "вмороженному" беспорядку, т.е. по положениям примесей. При этом в более высоких порядках выделим члены, когда квазичастица испытывает однократное, двукратное и т.п. рассеяния. Тогда после суммирования ряда усредненную функцию Грина можно записать в виде:

$$\langle G_{jl}(\tau, \mathbf{k}, \mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left[\left(G_{jl}^{(0)}(\tau, \mathbf{k}) \right)^{-1} - \langle \Sigma_{jl}(\tau, \mathbf{k}) \rangle \right]^{-1}, \quad (3.13)$$

где $\Sigma_{jl}(\tau, \mathbf{k})$ - тензор собственно-энергетической части, который задается рядом:

$$\langle \Sigma_{jl}(\tau, \mathbf{k}) \rangle = \langle \Sigma_{jl}^{(1)}(\tau, \mathbf{k}) \rangle + \langle \Sigma_{jl}^{(2)}(\tau, \mathbf{k}) \rangle + \langle \Sigma_{jl}^{(3)}(\tau, \mathbf{k}) \rangle + .. \quad (3.14)$$

Здесь $\langle \Sigma_{jl}^{(1)}(\tau, \mathbf{k}) \rangle$ соответствует рассеянию квазичастицы на одной примеси, $\langle \Sigma_{jl}^{(2)}(\tau, \mathbf{k}) \rangle$ - последовательному рассеянию на двух примесях, $\langle \Sigma_{jl}^{(3)}(\tau, \mathbf{k}) \rangle$ - последовательному рассеянию на трех примесях и т.д. При таких обозначениях собственные значения уравнения (3.4), которые определяются полюсами гриновской функции, находятся из секулярного уравнения:

$$\det \left(\delta_{jl} \cdot \tau - \frac{3}{5} \xi_s^2 k^2 (\delta_{jl} + 2k_j k_l) - \langle \Sigma_{jl}(\tau, \mathbf{k}) \rangle \right)_{\mathbf{k} \rightarrow 0} = 0. \quad (3.15)$$

Здесь предел $k \rightarrow 0$ соответствует порогу локализации [9].

Усредним каждый из членов ряда (рис.23) для гриновской функции. Усредненный член, описываемый первой диаграммой без концевых функций Грина

нулевого порядка, даст $(2\pi)^3\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\langle\Sigma_{jl}^1(\mathbf{k}, \tau)\rangle$. По определению он равен:

$$\langle\eta_{jl}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\rangle = \eta_{jl}^1(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\left\langle\sum_s e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}_s}\right\rangle. \quad (3.16)$$

Считая, что аэрогель в среднем однороден, для указанного среднего получим:

$$\left\langle\sum_s e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}_s}\right\rangle = N \int \frac{d^3r}{V} \exp(i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{r}) = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')n. \quad (3.17)$$

В результате для $\langle\Sigma_{jl}^1(\mathbf{k}, \tau)\rangle$ имеем:

$$\langle\Sigma_{jl}^1(\mathbf{k}, \tau)\rangle = \eta_{jl}^1(0)n, \quad (3.18)$$

где $\eta_{jl}^1(0)$ дается выражением:

$$\eta_{jl}(\mathbf{k} \rightarrow 0) = \frac{\pi^2 \xi_0}{4 l_{tr}} \delta_{jl}, \quad (3.19)$$

здесь l_{tr} - длина свободного пробега квазичастиц в аэрогеле. Полученная поправка соответствует среднему сдвигу температуры перехода $\tau_{ba}^1 = \frac{1}{3}\langle\Sigma_{ll}^1(\mathbf{k}, \tau)\rangle$ без учета корреляций.

Интересующий нас эффект, связанный с анизотропией аэрогеля, возникает, начиная с поправки второго порядка, возникающей из-за двукратного рассеяния квазичастицы на примесях:

$$(2\pi)^3\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\langle\Sigma_{jl}^{(2)}(\mathbf{k}, \tau)\rangle = \int \eta_{jm}^{(1)}(\mathbf{k} - \mathbf{q})\eta_{ln}^{(1)}(\mathbf{q} - \mathbf{k}')\left\langle\sum_{s,t} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\mathbf{r}_s+i(\mathbf{k}'-\mathbf{q})\mathbf{r}_t}\right\rangle G_{mn}^{(0)}(\tau, \mathbf{k}_1) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \quad (3.20)$$

Входящее в интеграл среднее можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} \left\langle\sum_{s,t} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\mathbf{r}_s+i(\mathbf{k}'-\mathbf{q})\mathbf{r}_t}\right\rangle &= \left\langle\sum_{s,t} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\mathbf{r}_s+i(\mathbf{k}'-\mathbf{q})(\mathbf{r}_s+\mathbf{r}_{ts})}\right\rangle = \\ &= \left\langle\sum_s e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\mathbf{r}_s}\right\rangle\left\langle\sum_t e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{q})\mathbf{r}_{ts}}\right\rangle = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')n\left\langle\sum_t e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{q})\mathbf{r}_{ts}}\right\rangle, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $\mathbf{r}_{ts} = \mathbf{r}_t - \mathbf{r}_s$. С учетом этого поправку второго порядка к собственно-энергетической части можно переписать в виде:

$$\langle\Sigma_{jl}^{(2)}(\tau, \mathbf{k})\rangle = \int \eta_{jm}^{(1)}(\mathbf{k} - \mathbf{q})\eta_{ln}^{(1)}(\mathbf{q} - \mathbf{k})n\left\langle\sum_t e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\mathbf{r}_{ts}}\right\rangle G_{mn}^{(0)}(\tau, \mathbf{q}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \quad (3.22)$$

Так как мы ищем поправку к собственному значению невозмущенного состояния, т.е. к $\tau = 0$, можно подставить в (3.22) невозмущенную гриновскую функцию при $\tau = 0$. Как уже отмечалось выше, будем считать, что порогу локализации соответствует $\mathbf{k} = 0$, поэтому для $\langle \Sigma_{jl}^{(2)} \rangle$ имеем:

$$\langle \Sigma_{jl}^{(2)} \rangle = \langle \Sigma_{jl}^{(2)}(0, 0) \rangle = \int \eta_{jm}^{(1)}(-\mathbf{q}) \eta_{ln}^{(1)}(\mathbf{q}) n \langle \sum_t e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_{ts}} \rangle G_{mn}^{(0)}(0, \mathbf{q}) \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}. \quad (3.23)$$

Входящее под знак интеграла среднее по определению равно структурному фактору:

$$\langle \sum_t e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{r}_{ts}} \rangle = S(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad (3.24)$$

который характеризует взаимное расположение частиц, образующих аэрогель.

Перепишем структурный фактор в виде:

$$S(\mathbf{k} - \mathbf{q}) = 1 + \langle \sum_{t, t \neq s} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{r}_{ts}} \rangle. \quad (3.25)$$

Первый член соответствует двукратному рассеянию на одной примеси и не связан с корреляциями между частицами. Несмотря на то, что указанный член пропорционален первой степени концентрации его учет в $\Sigma^{(2)}$ дает поправку следующего порядка по возмущению и не приводит к качественно новым результатам. Поэтому мы данной поправкой пренебрежем.

Структурный фактор может быть записан через парную корреляционную функцию $C(\mathbf{r})$, которая по определению равна вероятности найти вторую частицу (t) на расстоянии \mathbf{r} от первой (s):

$$S(\mathbf{k}) = 1 + \frac{N-1}{V} \int C(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3 r \cong 1 + n \int C(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3 r, \quad (3.26)$$

где N – число частиц, образующих аэрогель.

Аэрогель обладает несколькими характерными масштабами длин. На расстояниях больших нескольких тысяч ангстрем аэрогель является однородным и как следствие $C(\mathbf{r})_{r \rightarrow \infty} \rightarrow const$. В то же время существует интервал длин, $\rho < r < R$, на которых аэрогель проявляет фрактальную структуру, здесь R -

радиус корреляции, т.е. расстояние на котором корреляции в расположении частиц начинают спадать. На этих расстояниях парная корреляционная функция аэрогеля обладает фрактальным поведением:

$$C^F(\mathbf{r}) = A(\rho/r)^{3-D}, \quad (3.27)$$

где D - фрактальная размерность аэрогеля. Чтобы обеспечить плавное убывание парной корреляционной функции на радиусе корреляций R обычно вводится модельная функция вида [42]:

$$C^F(\mathbf{r}) \longrightarrow C^F(\mathbf{r}) \exp(-r/R). \quad (3.28)$$

Таким образом, парная корреляционная функция описывается двумя пределами:

$$C(\mathbf{r}) = \begin{cases} A(\rho/r)^{3-D} \exp(-r/R), & \rho < r < R, \\ \text{const} \approx 1, & r \gg R. \end{cases} \quad (3.29)$$

Получающийся отсюда структурный фактор можно записать как:

$$S(\mathbf{k}) = 1 + \begin{cases} (2\pi)^3 n \cdot \delta(\mathbf{k}), & k \rightarrow 0, \\ \text{const} \cdot \frac{\sin[(D-1) \arctan(kR)]}{kR(1+k^2R^2)^{(D-1)/2}}, & 1/R < k < 1/\rho. \end{cases} \quad (3.30)$$

Первый член в $S(\mathbf{k})$ не дает вклада в собственно-энергетическую часть, так как возникает из-за двукратного рассеяние на двух независимых примесях, а все такие процессы были учтены в поправке первого порядка $\langle \Sigma^{(1)} \rangle$. Поэтому нас будет интересовать поправка возникающая из-за второго члена в (3.30), описывающего корреляции. Зависимость указанного члена от волнового вектора имеет две особенности: для $1/R < k < 1/\rho$ имеет место зависимость $S(\mathbf{k}) \sim k^{-D}$, а эффективное обрезание для указанной зависимости происходит при $k \sim 1/R$. Коэффициент A в (3.27), (3.28) мог бы быть найден из условия нормировки структурного фактора:

$$\int S(\mathbf{r}) d^3k = (2\pi)^3 n. \quad (3.31)$$

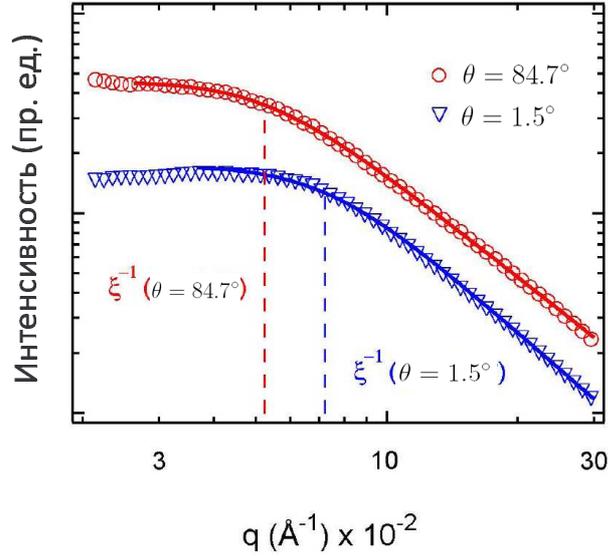


Рис. 24.

Зависимость интенсивности рассеянного аэрогелем рентгеновского излучения $I(q, \phi = \theta + \frac{\pi}{2})$ от переданного импульса q , для двух значений угла θ . Графики смещены друг относительно друга в вертикальном направлении для большей наглядности, т.к. на больших q они совпадают. [15]

Однако для этого необходимо знать правильную функцию $S(\mathbf{k})$.

Влияние деформации аэрогеля заключается в изменении структурного фактора. Будем считать недеформированный аэрогель изотропным. Как следствие его структурный фактор не должен зависеть от направления волнового вектора \mathbf{k} . Важно отметить, что структурный фактор непосредственно может быть измерен в экспериментах по мало-угловому рассеянию рентгеновских лучей. Результаты таких измерений для одноосно-деформированного аэрогеля представлены в статье [15]. Как показали авторы работы [15] результаты измерений могут быть описаны такой моделью деформации аэрогеля, при которой фрактальная размерность аэрогеля не изменяется, а корреляционный радиус приобретает угловую зависимость вида (рис.24):

$$R(\theta) = R_0 - r_1 \cos(2\theta), \quad (3.32)$$

где R_0 - радиус корреляции до введения в систему деформации, r_1 - амплитуда модуляции радиуса корреляции, θ - угол между осью деформации и заданным

направлением. Амплитуда изменения радиуса корреляций может быть выражена через макроскопические параметры, характеризующие сжатие-растяжение аэрогеля:

$$\frac{r_1}{R_0} = \frac{1}{2}(1 - \sigma)\alpha \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (3.33)$$

здесь $\frac{\Delta l}{l_0}$ - относительное изменение длины образца, $\Delta l > 0$ соответствует растяжению, σ - коэффициент Пуассона ($\sigma \approx 0.2 \div 0.3$), α - коэффициент передачи макроскопического напряжения на масштабы длины корреляции. Для малых деформаций, $\Delta l/l < 0.1$, коэффициент α измеренный в экспериментах оказался близок к 3. Так как мы рассматриваем только малые деформации, $r_1 \ll R_0$, то в этом случае возмущенную функцию корреляции можно записать в виде:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{r}) &= A \left(\frac{\rho}{r}\right)^{(3-D)} \exp\left(-\frac{r}{R_0 + r_1 \cos(2\theta)}\right) \approx \\ &\approx A \left(\frac{\rho}{r}\right)^{(3-D)} \exp\left(-\frac{r}{R_0}\right) \left[1 + \frac{r}{R_0} \frac{r_1}{R_0} \cos(2\theta)\right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Подставим данную функцию корреляции в (3.23). Основная анизотропная поправка к собственно-энергетической части получается за счет угловых зависимостей структурного фактора и невозмущенной гриновской функции. При этом в силу того, что основной вклад в интеграл (3.23) вносят малые \mathbf{k} , в самом интеграле можно заменить $\eta_{jl}^1(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \simeq \eta_{jl}^1(0) = \delta_{jl}\eta^1(0)$. Таким образом для поправки к собственно-энергетической части можно написать:

$$\begin{aligned} \langle \Sigma_{jl}^{(2)} \rangle &= (n\eta^{(1)}(0))^2 \int \int \frac{d^3 q d^3 r}{(2\pi)^3} \delta_{jm} \delta_{ln} \cdot \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \cdot \\ &\cdot A \left(\frac{\rho}{r}\right)^{(3-D)} \exp\left(-\frac{r}{R_0}\right) \left[1 + \frac{r}{R_0} \frac{r_1}{R_0} \cos(2\theta)\right] \left[\frac{5}{3} \frac{\delta_{mn}}{\xi_s^2 q^2} + \frac{10}{9} \frac{\hat{q}_m \hat{q}_n}{\xi_s^2 q^2}\right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

После последовательного интегрирования по \mathbf{q}, \mathbf{r} (см. Приложение 2.) получим:

$$\langle \Sigma_{jl}^{(2)} \rangle = \Sigma_{jl}^{(2I)} + \Sigma_{jl}^{(2A)}, \quad (3.36)$$

где изотропная часть собственно-энергетической части в нулевом приближении по деформации дается выражением:

$$\Sigma_{jl}^{(2I)} = \Sigma^{(2I)} \delta_{jl} = -\frac{35}{27} A' \cdot \Gamma(D - 1) (n\eta^{(1)}(0))^2 \frac{R_0^2}{\xi_s^2} \delta_{jl}, \quad (3.37)$$

где $A' = A(\rho/R_0)^{3-D}$, а анизотропная поправка в первом приближении по деформации соответственно:

$$\Sigma_{jl}^{(2A)} = - \left(\frac{2}{9}\right)^2 A' \cdot \Gamma(D) (n\eta^{(1)}(0))^2 \frac{R_0 r_1}{\xi_s^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

ось z направлена вдоль оси деформации. Отметим, что в силу того, что $\eta(0) \sim \xi_0/l_{tr}$, $\Sigma_{jl}^{(2I)}$ и $\Sigma_{jl}^{(2A)}$ определяются исключительно параметрами, описывающими аэрогель: R_0, r_1, D, l_{tr} .

Аналогичным образом вклад в собственно-энергетическую часть от трехкратного рассеяния можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \langle \Sigma_{jl}^{(3)} \rangle &= n \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} G_{em}^{(0)}(0, \mathbf{q}) G_{np}^{(0)}(0, \mathbf{q}') \cdot \\ &\cdot \eta_{je}^{(1)}(-\mathbf{q}) \eta_{mn}^{(1)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \eta_{pl}^{(1)}(\mathbf{q}') \langle \sum_{t,u} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\mathbf{r}_{ts}} e^{i\mathbf{q}'\mathbf{r}_{us}} \rangle \end{aligned} \quad (3.39)$$

Согласно [9] она может быть вычислена в предположении, что

$$\langle \sum_{t,u} e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_{ts}} e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}_{us}} \rangle = S(\mathbf{k}_1) S(\mathbf{k}_2). \quad (3.40)$$

В этом случае можно переписать среднее входящее в интеграл в симметричном виде:

$$\langle \sum_{t,u} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\mathbf{r}_{ts}} e^{i\mathbf{q}'\mathbf{r}_{us}} \rangle = \langle \sum_t e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_{ts}} \rangle \langle \sum_u e^{i\mathbf{q}'\mathbf{r}_{tu}} \rangle = S(\mathbf{q}) S(\mathbf{q}'). \quad (3.41)$$

Снова учитывая тот факт, что основной вклад в интеграл происходит от области $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \rightarrow 0$, легко получить:

$$\langle \Sigma_{jl}^{(3)} \rangle = \frac{1}{n\eta^{(1)}(0)} \langle \Sigma_{jm}^{(2)} \rangle \langle \Sigma_{ml}^{(2)} \rangle. \quad (3.42)$$

Аналогичное предположение о том, что корреляционная функция высших порядков разбивается на произведение парных корреляционных функций делается для следующих членов ряда. Благодаря тому, что матрица $\Sigma_{jl}^{(2)}$ диагональна,

для собственно-энергетической части получим ряд геометрической прогрессии, сумма которого равна:

$$\langle \Sigma_{jl} \rangle = n\eta^{(1)}(0) \left(\delta_{jl} - \frac{1}{n\eta^{(1)}(0)} \langle \Sigma_{jl}^{(2)} \rangle \right)^{-1}. \quad (3.43)$$

Считая, что $\Sigma^{(2I)} \gg \Sigma^{(2A)}$, можно разложить (3.43):

$$\langle \Sigma_{jl} \rangle = \frac{n\eta^{(1)}(0)\delta_{jl}}{\left(1 - \frac{1}{n\eta^{(1)}(0)}\Sigma^{(2I)}\right)} + \frac{\Sigma_{jl}^{(2A)}}{\left(1 - \frac{1}{n\eta^{(1)}(0)}\Sigma^{(2I)}\right)^2}. \quad (3.44)$$

Первый член в (3.44) был получен в работе [9], он описывает среднее подавление температуры перехода в аэрогеле. Расщепление температуры перехода τ_{jl}^a описывается вторым членом, который гораздо меньше первого в меру малости деформации. Подставляя в (3.44) значения $\Sigma^{(2I)}$, $\Sigma_{jl}^{(2A)}$ получим:

$$\begin{aligned} \tau_{jl}^a &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n\eta^{(1)}(0)}\Sigma^{(2I)}\right)^2} \Sigma_{jl}^{(2A)} = \\ &= \frac{\left(\frac{2}{9}\right)^2 A' \cdot \Gamma(D)(n\eta^{(1)}(0))^2 \frac{R_0 r_1}{\xi_s^2}}{\left(1 + \frac{35}{27} A' \cdot \Gamma(D-1)(n\eta^{(1)}(0)) \frac{R_0^2}{\xi_s^2}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Полученное выражение показывает, что расщепление температур может быть вызвано изменением корреляций между частицами на расстояниях порядка радиуса корреляций аэрогеля, т.е. при учете длинноволновых корреляций. При этом рассеяние самих частиц на этих расстояниях можно считать изотропным. Зависимость полученного выражения от давления довольно слабая, так как от давления зависит только длина когерентности. Учитывая, что $\eta^{(1)}(0) \sim \xi_0/l_{tr}$ получим, что зависимость от давления останется только в знаменателе. Для дальнейшего анализа удобно переписать (3.45) в виде:

$$\tau_{jl}^a = -\frac{2(D-1)}{105} (1-\sigma)\alpha \frac{\Delta l}{l_0} \frac{\Sigma^{(2I)}}{\left(1 - \frac{1}{n\eta^{(1)}(0)}\Sigma^{(2I)}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Как было показано в [9, 10], первое выражение в (3.44) хорошо описывает интерполяцию между двумя пределами для понижения температуры перехода: при больших давлениях и маленьких. При маленьких давлениях понижение температуры хорошо описывается моделью однородного рассеяния (МОР) – $\tau_{ba} \sim \xi_0/l_{tr}$. При высоких давлениях наблюдается другая зависимость для понижения температуры перехода – $\tau_{ba} \sim \xi_0^2/R^2$. Это связано с тем, что при повышении давления уменьшается длина когерентности сверхтекучего ${}^3\text{He}$ – ξ_0 . Как следствие, при некотором давлении длина когерентности сравнивается с радиусом корреляции самого аэрогеля и эффект корреляций становится существенным. Хорошее согласие с экспериментами по понижению температуры сверхтекучего перехода в аэрогеле [11, 12] достигается, если положить $\Sigma^{(2I)} = -0.3$ (рис.5), ($\Sigma^{(2I)} = -\pi^2/4 \cdot \xi_a/l_{tr}$, $\xi_a = 50$ нм, $l_{tr} = 140$ нм [10]). Еще раз отметим, что $\Sigma^{(2I)}$ не зависит от давления и определяется только параметрами, характеризующими аэрогель. Зная этот параметр, можно найти ориентационную энергию одноосно-деформированного аэрогеля.

3.4 Ориентация В-подобной фазы

Вначале рассмотрим влияние анизотропного аэрогеля на ориентацию B -подобной фазы. В отсутствие магнитного поля параметр порядка B -подобной фазы изотропен, поэтому ориентационный эффект отсутствует. Однако ситуация меняется в присутствии магнитного поля. Параметр порядка B -подобной фазы в магнитном поле деформируется и принимает вид [43]:

$$A_{\mu j} = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{3}} \left(\Delta_{\perp} R_{\mu j} + (\Delta_{\parallel} - \Delta_{\perp}) R_{\nu j} \hat{h}_{\nu} \hat{h}_{\mu} \right), \quad (3.47)$$

где $\hat{\mathbf{h}}$ - направление магнитного поля, $\Delta_{\parallel, \perp}$ – щель в спектре квазичастиц с импульсом, направленным вдоль направления магнитного поля или перпендикулярно направлению магнитного поля соответственно, $R_{\mu j}(\hat{\mathbf{h}}, \theta)$ - матрица вращения, описываемая осью вращения $\hat{\mathbf{h}}$ и углом поворота $\theta_L = \arccos(-\frac{1}{4} \frac{\Delta_{\parallel}}{\Delta_{\perp}})$,

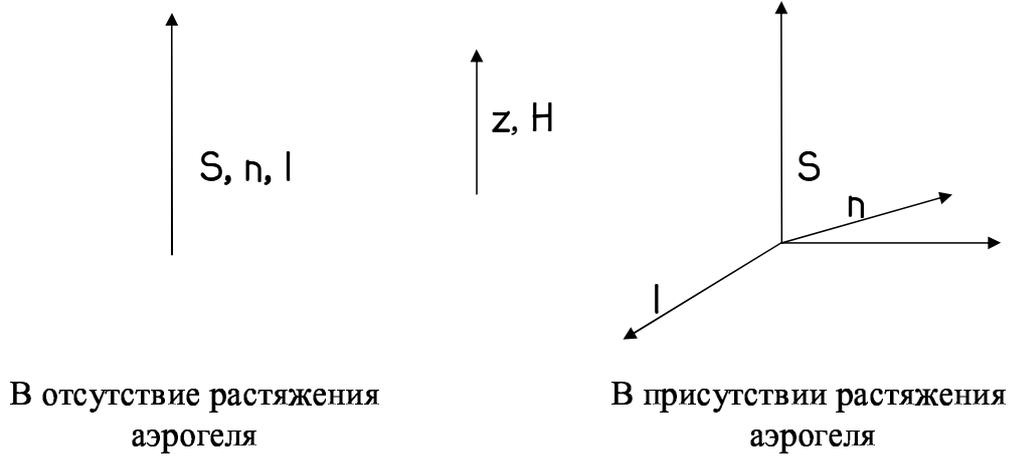


Рис. 25.

Изменение ориентации векторов $\hat{\mathbf{n}}$ и $\hat{\mathbf{l}}$ в присутствии одноосно-растянутого аэрогеля.

который находится из минимизации дипольной энергии. Ориентация вектора $\hat{\mathbf{n}}$ определяется магнитным полем и дипольными силами. Соответствующий член в свободной энергии равен:

$$\Delta F_H^B = \lambda_D N(0) (\Delta_{\parallel} - \Delta_{\perp}) \Delta_{\perp} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{h}})^2, \quad (3.48)$$

$\Delta_{\parallel} \leq \Delta_{\perp}$. В тоже время одноосно-деформированный аэрогель ориентирует орбитальную часть параметра порядка. Подстановка (3.47) в (3.7) для равновесной конфигурации параметра порядка дает:

$$\Delta F_a^B = \frac{1}{3} N(0) (\Delta_{\parallel}^2 - \Delta_{\perp}^2) R_{\mu j} R_{\nu l} h_{\mu} h_{\nu} \tau_{jl}^a \approx \frac{2}{3} N(0) (\Delta_{\parallel} - \Delta_{\perp}) \Delta_{\perp} \tau_{xx}^a (1 - 3l_z^2), \quad (3.49)$$

здесь для удобства введен орбитальный вектор

$$l_j = \hat{R}_{\mu j} S_{\mu}, \quad (3.50)$$

S_{μ} - вектор спина. Сравним две ориентационные энергии для случая одноосного растяжения аэрогеля вдоль направления магнитного поля, $\tau_{xx}^a > 0$. В отсутствие анизотропии аэрогеля векторы $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{l}}$, $\hat{\mathbf{s}}$ направлены вдоль магнитного поля рис.25. В растянутом аэрогеле вектор $\hat{\mathbf{l}}$ стремится повернуться перпендикулярно к магнитному полю, для чего необходимо соответствующим образом

повернуть вектор $\hat{\mathbf{n}}$. Решения (3.50) для заданной конфигурации векторов $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{l}}$, $\hat{\mathbf{s}}$ при минимуме дипольной энергии всегда существуют ($n_z = \arccos(1/\sqrt{5})$), поэтому новая ориентация начинает образовываться, когда

$$\Delta F_a^B \sim \Delta F_H^B. \quad (3.51)$$

Оценка τ_{xx}^a для значений параметров, характеризующих аэрогель [15] и ${}^3\text{He}$, $D \simeq 1.7$, $\Sigma^{(2I)} = -0.3$, $\sigma \simeq 0.2$, $\alpha = 2.5$, $\xi_0 \sim 20$ нм, $l_{tr} \simeq 140$ нм дает:

$$\tau_{xx}^a \approx 1 \cdot 10^{-3} \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (3.52)$$

Учитывая, что $\lambda_D \sim 10^{-6}$ можно найти, что деформации порядка

$$\gamma_{min} \sim 4 \cdot 10^{-4} \quad (3.53)$$

уже достаточно для получения ориентации параметра порядка отличной от объемной в отсутствие деформированного аэрогеля. Как видно из сделанной оценки, ориентирующий эффект одноосно-деформированного аэрогеля достаточно, если сравнивать с ориентационным эффектом происходящим из-за магнитного поля и дипольной энергии.

3.5 Ориентация А-подобной фазы

Оценка силы ориентационного эффекта для А-подобной фазы может быть сделана аналогичным способом. Для ясности рассмотрим случай одноосно-сжатого аэрогеля. Как было показано в [36], [14] в сжатом аэрогеле реализуется А-подобная фаза по форме совпадающая с объемной АБМ-фазой. Параметр порядка А-подобной фазы в этом случае имеет вид:

$$A_{\mu j} = \frac{1}{\sqrt{2}} d_{\mu} (m_j + i n_j), \quad (3.54)$$

где вектор $\hat{\mathbf{d}}$ - соответствует спиновой части параметра порядка, а $\mathbf{l} = [\mathbf{m}, \mathbf{n}]$ орбитальной. В отсутствие сжатия аэрогеля магнитное поле и дипольные силы

ориентируют вектор $\hat{\mathbf{I}}$ перпендикулярно магнитному полю:

$$\Delta F_H^A = \frac{1}{2} \Delta \chi (\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{H})^2, \quad (3.55)$$

$$\Delta f_D = -\frac{2}{5} \lambda_D N(0) \Delta_0^2 (\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{I}})^2. \quad (3.56)$$

Однако как и в предыдущем случае сжатый аэрогель способен ориентировать орбитальную часть параметра порядка:

$$\Delta F_a^A = -N(0) \frac{\Delta^2}{2} \tau_{xx}^a (1 - 3l_z^2). \quad (3.57)$$

Для оценки ориентационной силы аэрогеля сравним ΔF_a^A с ориентирующей энергией магнитного поля ΔF_H^A . Как известно, ориентационная энергия, вызванная дипольными силами, равняется ориентационной энергии вызванной магнитным полем при значении поля примерно 30 Гс [43], и величина этого поля не зависит от температуры. В тоже время отношение ориентационной энергии аэрогеля к соответствующей дипольной энергии равно:

$$\frac{F_a^A}{f_D} = \frac{15}{4} \frac{\tau_{xx}^a}{\lambda_D} \sim 4 \cdot 10^3 \cdot \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (3.58)$$

С учетом этого магнитное поле, соответствующее одному проценту сжатия равняется примерно $2 \cdot 10^2$ Гс.

3.6 Обсуждение результатов

Сравнивая формулу (???) с аналогичной формулой из второй главы (2.26), мы видим, что при учете длинноволновых корреляций ориентационная энергия, связанная с анизотропией аэрогеля, уменьшается на порядок. Отметим также, что если наличие корреляций в системе лишь смещает температуру сверхтекучего перехода, то ориентационный эффект в отсутствие корреляций пропадает, так как в данной модели рассеяние считается изотропным.

Экспериментально описанная выше ситуация по ориентации параметра порядка в B -подобной фазе исследовалась в работе [44]. Авторы произвели свою

собственную оценку минимальной деформации, в которой получилась нижняя граница деформации порядка 10%. Столь существенное различие в оценке происходит из того, что в работе [44] ориентационная энергия аэрогеля сравнивалась с полной дипольной энергией. Как было показано выше правильнее сравнивать ориентационную энергию аэрогеля с ориентационной энергией в магнитном поле. В указанной работе производилось радиальное сжатие цилиндрического куска аэрогеля приблизительно на 20%, при этом как изменялась длина аэрогеля вдоль оси цилиндра не совсем понятно. Несмотря на то, что описанная в настоящей работе теория применима для маленьких деформаций можно определенно утверждать, что в данной экспериментальной работе $\tau_{xx}^a < 0$. При этом само значение τ_{xx}^a может сильно отличаться, потому что, во первых, сжатие происходит при других граничных условиях и, во-вторых, оно не мало. Тем не менее, в данных экспериментальных условиях была обнаружена ориентация $\mathbf{l} \perp \mathbf{H}$, что и следует из (3.49). Другая оценка силы ориентационного эффекта глобальной анизотропии аэрогеля была сделана в работе [45]. По оценке авторов используемый в экспериментах аэрогель был одноосно сжат на $1 \div 2\%$, не обладая при этом изначально глобальной анизотропией. Из полученных в данной работе результатов следует, что при указанном сжатии анизотропия аэрогеля полностью определяет текстуру B -подобной фазы ($\mathbf{l} \parallel$ оси сжатия). Обобщая все экспериментальные данные можно утверждать, что деформации порядка 1% уже достаточно для ориентации параметра порядка отличным от объемного случая образом как в A -подобной, так и в B -подобной фазах [45], [46]. Этот результат не противоречит полученным выше оценкам, однако сказать точно при какой граничной деформации глобальная анизотропия начинает ориентировать параметр порядка из этого пока нельзя.

Основной вывод, который можно сделать на основании результатов второй и третьей глав состоит в том, что глобальная анизотропия действительно сильно влияет на пространственную ориентацию параметра порядка. К сожалению,

контролировать *однородную* деформацию с точностью лучшей чем десятая доля процента вряд ли возможно экспериментально, поэтому проследить переход от одной ориентации параметра порядка к другой в настоящий момент нельзя. Однако количественное сравнение теории с экспериментом возможно произвести для больших деформаций. Для достаточно больших деформаций, порядка 10%, ориентационная энергия будет давать вклад в спиновую динамику, так как в этом случае возможны существенные поправки сравнимые с дипольной энергией.

Заключение

Перечислим основные результаты работы.

1. Исследована устойчивость когерентной прецессии в сверхтекучем ${}^3\text{He-B}$ по отношению к параметрическому возбуждению спиновых волн с конечными волновыми векторами. Показано, что когерентная прецессия становится неустойчивой при низких температурах для всех углов отклонения намагниченности от положения равновесия. Показано, что для случая однородно-прецессирующего домена найденный механизм неустойчивости является главным при развитии наблюдаемой в экспериментах катастрофической релаксации. Показано, что найденная в пределе низких температур зависимость температуры начала развития неустойчивости от магнитного поля согласуется с экспериментально наблюдаемой.

2. На основе простой модели аэрогеля получена ориентационная энергия АБМ-фазы в одноосно-деформированном аэрогеле для двух типов рассеяния квазичастиц на нитях аэрогеля - диффузного и зеркального. Посчитана корреляционная функция для возмущающего поля аэрогеля. Оценена минимальная деформация, ниже которой эффекты флуктуаций становятся определяющими и возможно образование разупорядоченных состояний типа Имри-Ма состояния.

3. На основе модели аэрогеля, учитывающей корреляции в расположении частиц, образующих аэрогель, исследовано влияние анизотропии аэрогеля на ориентацию параметра порядка сверхтекучего ${}^3\text{He}$. Найдены ориентационные энергии для A -подобной и B -подобной фаз в одноосно-деформированном аэрогеле. Для B -подобной фазы найдена минимальная деформация, ориентирующая параметр порядка отличным от объемного случая образом.

Список литературы

1. A.J. Leggett, Ann. Phys. (N.Y.) **85**, 11 1974
2. Yu.M. Bunkov, V.V. Dmitriev, Yu.M. Mukharsky et al., *Europhysics Lett.* **8**, 645 (1989).
3. Yu.M. Bunkov, V.M. Golo, J. Low Temp. Phys., 2004, Vol. 137, 625
4. H. Suhl, J. Phys. Chem. Solids **1**, 209, 1957
5. T. Matsushita, R. Nomura, H.H. Hensley et al., J. Low Temp. Phys. **105**, 67 (1996).
6. T. Ohmi, M. Tsubota, J. Low Temp. Phys. **83**, 177 (1991)
7. Т.М. Наард, G. Gervais, R. Nomura et al., Physica B, 2000, 289
8. А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, ЖЭТФ, 1961. Том 39. 1781 с.
9. И.А. Фомин, Письма в ЖЭТФ 88, вып.1, 65 (2008)
10. J.A. Sauls, P. Sharma, Phys. Rev. B 68, 224502 , (2003)
11. G. Gervais, K. Yawata, N. Mulders et al., Phys. Rev. B, 2002, V.66, 054528
12. K. Matsumoto, J.V. Porto, L. Pollack et al., Phys. Rev. Lett., 1997, V.89, 253
13. Т. Kunimatsu, А. Matsubara, К. Izumina et al, Pis'ma v ZhETF, 2007, V.86, issue3, 244
14. I.A. Fomin, J Low Temp Phys 150, Numbers 3-4, 464 (2008).
15. J. Pollanen, K. Shirer, S. Blinstein et al, arXiv:cond-mat/0711.3495v1
16. И.А. Фомин, Письма в ЖЭТФ, 1979. Том 30. Вып.3. 179 с.
17. И.А. Фомин, ЖЭТФ, **78**, вып. 6, 2392 (1980)

18. Yu.M. Bunkov, V.V. Dmitriev, J. Nyeki et al., *Physica B* **165**, 675 (1990).
19. I.A. Fomin, *Sov. Phys. JETP*, 1985, Vol.61, 1207
20. Yu.M. Bunkov, *J. Low Temp. Phys.*, **135**, 337 (2004)
21. D.A. Geller, D.M. Lee, *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 1032 (2000)
22. A.M. Markelov, *Europhys. Lett.*, **12**, 519 (1990)
23. Yu.M. Bunkov, S.N. Fisher, A.M. Guénault et al., *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 600 (1992)
24. Yu.M. Bunkov, V.S. Lvov, G.E. Volovik, *Pis'ma v ZhETF* **83**, 624 (2006)
25. Yu.M. Bunkov, V.S. Lvov, G.E. Volovik, *Pis'ma v ZhETF* **84**, 349 (2006)
26. Е.В. Суровцев, И.А. Фомин, *Письма в ЖЭТФ* **83**, 479 (2006)
27. Е.В. Суровцев, И.А. Фомин, *Письма в ЖЭТФ* 2009. Том 90. Вып. 3. 232 с.
28. И.А. Фомин, *ЖЭТФ*, **84**, 2109 (1983)
29. Ю.М. Буньков, В.В. Дмитриев, Ю.М. Мухарский, *Письма в ЖЭТФ* **43**, 131 (1986)
30. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Механика*.—М.: Наука, (1988), § 27
31. D. Einzel, *J. Low Temp. Phys.*, **84**, 321, (1991)
32. И.А. Фомин, *ЖЭТФ*, **94**, 112 (1988).
33. Yu.M. Bunkov, O.D. Timofeevskaya, G.E. Volovik, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1817 (1994)
34. Yu.M. Bunkov, V.V. Dmitriev, A.V. Markelov et al., *Phys. Rev. Lett.* **65**, 867 (1990)
35. D. Rainer, M. Vuorio *J.Phys. C: Solid State Phys.* **10** (1977) 3093.

36. G.E. Volovik, J. Low Temp Phys 150, Numbers 3-4, 464 (2008).
37. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория Упругости.–М.: Наука, (1965), § 12
38. I.A. Fomin, J. of Phys. and Chemistry of Solids **66** (2005) 1321-1324.
39. V. Ambegaokar, P.G. deGennes, D. Rainer, Phys. Rev. A, 1974, Vol.9, N.6, 2676
40. E.V. Surovtsev, I.A. Fomin, J Low Temp Phys 150, Numbers 3-4, 487 (2008).
41. Е.В. Суровцев, ЖЭТФ, 2009. Том 135. Вып.4. 1 с.
42. T. Freltof, J.K. Kjems, and S.K. Sinha, Phys. Rev. B 33, 269 (1986).
43. D. Vollhardt, P. Wölfle, The Superfluid Phases of 3He , Tailor and Fransis, (1990), p.134
44. J. Elbs, Yu.M. Bunkov, E. Collin et al, Phys.Rev.Lett 100, 215304 (2008)
45. T. Kunimatsu, A. Matsubara, K. Izumina et al, J Low Temp Phys 150, Numbers 3-4, 435 (2008)
46. V.V. Dmitriev, D.A. Krasnihin, N. Mulders et al, JETP Lett. 86, 594 (2007)